Олимпиада по математике ЦРР

8 класс

Решения и критерии оценивания

1. Разложим числитель дроби в правой части на простые делители $2979 = 3^2 \cdot 331$. Попытаемся обнаружить число 331 среди делителей левой части, для чего воспользуемся формулой разности кубов. В результате получаем, что такой делитель впервые встречается в случае $n = 31: (31^3 - 1) = (31-1)(31^2 + 31 + 1) = 30 \cdot 993 = 90 \cdot 331$. Очевидно, что если бы такой делитель возник ранее в знаменателе, то дробь удалось бы сократить. В знаменателе такой делитель впервые появляется при $n = 32: 32^3 + 1 = (32+1)(32^2 - 32 + 1) = 33 \cdot 993 = 99 \cdot 331$. Следовательно, если $n \geq 32$, дробь удалось бы сократить на 331. Таким образом, делаем вывод, что $n = 31$. Выполним проверку: $\frac{3 \cdot 21}{5 \cdot 13} \cdot \frac{4 \cdot 31}{6 \cdot 21} \cdot \frac{5 \cdot 43}{7 \cdot 31} \cdot \frac{6 \cdot 57}{8 \cdot 43} \cdot \frac{7 \cdot 73}{9 \cdot 57} \cdot \ldots \cdot \frac{30 \cdot 993}{32 \cdot 931} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 993}{13 \cdot 31 \cdot 32} = \frac{2979}{3224}$.

2. Промежутков между бусинами 30, следовательно, задача сводится к выбору из множества в 30 элементов (промежутки) подмножества в 8 элементов (разрезы). Общее число способов разрезания, очевидно, равно $N = C_{30}^{8} = \frac{30!}{22! \cdot 8!} = \frac{23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 5852925.$

3. Пусть число гномов за столом равно n. На первом круге гномы взяли суммарно $1 + 2 + \ldots + n = \frac{(n+1)n}{2}$ монет, а на третьем $2n + 1 + 2n + 2 + \ldots + 3n = \frac{(2n + 1 + 3n)n}{2} = \frac{(5n+1)n}{2}$ монет. Тогда по условию $\frac{(5n+1)n}{2} - \frac{(n+1)n}{2} = 2n^2 = 338 \Rightarrow n = 13$.

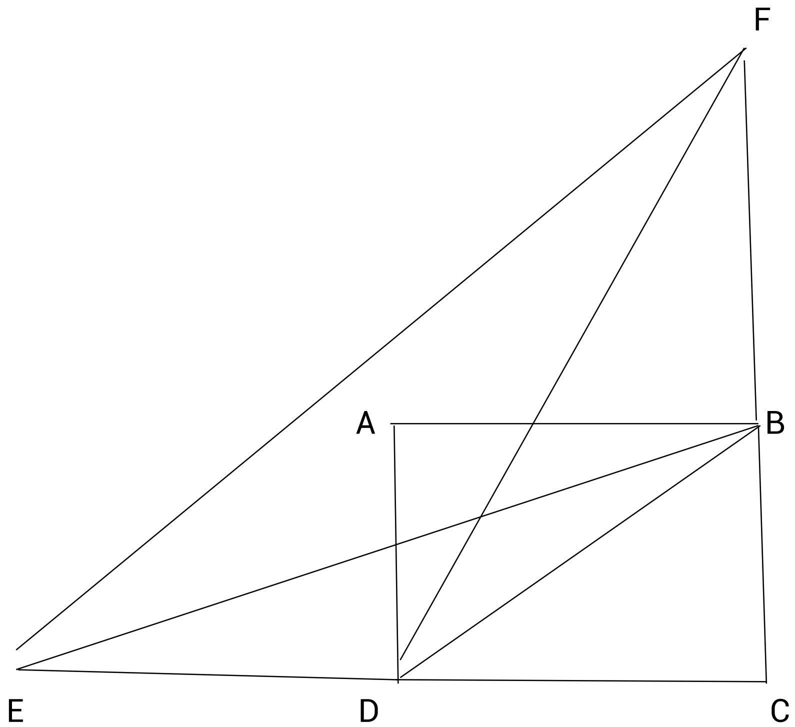
4. Обозначим сумму чисел, расположенных в углах исходного квадрата через x, а сумму чисел, стоящих вдоль сторон квадрата (за исключением угловых клеток) через y. Так как суммарно 5 данных в условии маленьких квадратов равны сумме $x + y$ и удвоенной сумме чисел, находящихся в центральном квадрате, получаем уравнение $x + y + 18 = 9 \cdot 5 = 45 \Rightarrow x + y = 27$. Суммируя числа, принадлежащие 4 возможным крестам и учитывая, что она складывается из y и утроенной суммы чисел в центральном квадрате, получаем второе уравнение $y + 27 = 4 \cdot 10 \Rightarrow y = 13$. Отсюда $x = 14$.

5. Выигрывает Сережа. Для этого своим первым ходом он должен забрать из двух корзин на первом ходу максимально возможное количество камней, кратное 2015, оставив в них поровну камней. Так как $20000 + 10000 - 2015 \cdot 14 = 1790 < 2015$, то из

первой корзины нужно забрать $20000-\frac{1790}{2}=19105$, а из второй - $10000-\frac{1790}{2}=9105$. После этого в корзинах останется по 895 камней, и своими следующими ходами Сережа будет каждый раз уравнивать количество камней в корзинах. Очевидно, такая возможность у него будет всегда, вне зависимости от действий Олега.

6. Пусть задуманное Колей трехзначное число x, а остаток от деления y, Тогда, записывая деление чисел на доске с остатком $\frac{206542}{x}=m+\frac{y}{x}$; $\frac{246151}{x}=n+\frac{y}{x}$ и вычитая эти равенства друг из друга, получаем $\frac{39609}{x}=n-m$, то есть 39609 делится на x. Разлагая 39609 на простые делители, получаем $39609=3^5\cdot163$. Следовательно, у числа 39609 имеется три трехзначных делителя: 163, 243, 489. Проверка показывает, что двузначные остатки от деления записанных на доске чисел можно получить только при делении их на 163: $\frac{206542}{163}=1267+\frac{21}{163}$; $\frac{246151}{163}=1510+\frac{21}{163}$. Ответ 21.

7. Рассмотрим данный прямоугольник



1. По теореме Пифагора $BD=\sqrt{20^2+21^2}=29$.

2. В ΔBDF $\angle BFD=\angle ADF$ как накрест лежащие, $\angle ADF=\angle BDF$ по условию (DF - биссектриса). Следовательно, ΔBDF - равнобедренный и $BF=BD=29$ и $FC=20+29=49$.

3. Аналогично устанавливаем, что ΔEDB - равнобедренный и $EC=21+29=50$.

4. По теореме Пифагора $EF^2 = 50^2 + 49^2 = 4901$.

8. Поскольку первоначально в каждом баке целое число литров бензина, после каждого переливания это свойство должно сохраниться. В заключительном состоянии, когда в одном из баков мы собрали наибольший объем бензина, этот объем должен быть кратен трем. Объем 21 литр можно получить, только переливая 14 л в бак с 7 литрами бензина. Но, поскольку эти числа не делятся на 3, а одно из них должно быть получено умножением целого числа на 3, получить такие объемы невозможно. Следующий вариант 18 л можно получить, переливая 12 л в бак с 6 л бензина. Такой вариант возможен. Для этого сначала переливаем 4 л из бака с 5 л в бак с 2 литрами. В результате получаем набор баков с (1, 6, 3, 4, 1, 6) литрами. Теперь наливаем 6 л в бак с 3 л из бака с 6 литрами и получаем набор (1, 6, 9, 4, 1, 0). Теперь наливаем 8 л из бака с 9 л в бак с 4 л и получаем набор (1, 6, 1, 12, 1, 0). Наконец, переливаем 12 л в бак с 6 л и получаем бак с 18 л бензина.

9. Пусть вес сосиски z, Том может откусить кусок весом x, а Джерри весом y.

Тогда получаем уравнения $\begin{cases} z - x = x + 20 \\ z - y = y + 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{z-20}{2} \\ y = \dfrac{z-30}{2} \end{cases}$. Тогда в случае, если они оба откусят свои куски, от сосиски останется $z - x - y = z - \dfrac{z-20}{2} - \dfrac{z-30}{2} = 25$ г.

10. Возведем первое равенство в квадрат и вычтем из него второе:

$$(a+b)^2 = (c+d)^2 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2cd + d^2 \Rightarrow$$
$$a^2 + 2ab + b^2 - a^2 - b^2 = c^2 + 2cd + d^2 - c^2 - d^2 \Rightarrow ab = cd.$$

Разлагая доказываемое соотношение по формуле суммы кубов и используя исходные и выведенное равенства, получаем тождество $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = (c+d)(c^2 - cd + d^2)$, что и требовалось доказать.