Олимпиада по математике ЦРР

5 класс

Решения и критерии оценивания

1. Так как в каждой паре движение происходит с одинаковыми скоростями, промежутки времени между встречами должны быть одинаковы. Следовательно, «Рено» с «Ниссаном» должны встретиться через 3 часа после встречи после встречи «Форда» с «Ниссаном», то есть в 17 часов.

Ответ без обоснования – 1 балл, с обоснованием – 3 балла.

2. Для четных чисел, не кратных 3 пару образуют два ближайших нечетных числа. Таких чисел в промежутке от 200 до 296 ровно 33, следовательно, пар будет 66. Если четное число делится на 3, то пару с ним образует только ближайшее нечетное число. В этом случае чисел в том же промежутке будет 16, и мы получаем еще 16 пар. Для нечетных чисел от 201 до 295, которые не делятся на 3, пару образуют 4 следующих за ними числа. Таких чисел 32, и мы получаем 128 пар. Если нечетное число делится на 3, то пару с ним образуют только 3 из последующих 4 чисел (исключаем делящееся на 3). Таких чисел 16, и пар будет 48. Наконец, для чисел 297, 298 и 299 получаем 2, 1 и 1 пару. Складывая результаты, получаем 262 пары

Ответ без обоснования – 0 баллов, верное обоснование с арифметической ошибкой – 2 балла, полное обоснование и правильный ответ – 6 баллов.

3. Пусть на каждой стороне треугольника (вместе с вершинами) поместилось n монет, тогда общее число монет в треугольнике равно $3n-3$ (вычитаем три монеты в вершинах, так как их мы учли дважды). Аналогично, полагая число монет на стороне квадрата равным m, получаем общее число монет в квадрате $4m-4$. По условию $m=n-2$. Тогда получаем уравнение $3n-3=4m-4=4(n-2)-4 \Rightarrow n=9, m=7$, а общее число монет 24.

Ответ без обоснования – 0 баллов, получены выражения для числа монет на стороне треугольника и квадрата, но допущена арифметическая ошибка – 2 балла, полное обоснование с правильным ответом – 5 баллов.

4. Пусть число синих яблок n, а груш m. Из условия задачи следуют ограничения $n \geq 17, m \geq 18 \Rightarrow n+m \geq 35$. Так как фруктов всего 27, это возможно только в случае, когда эти ограничения превращаются в равенства. Таким образом, в мешке 17 яблок и 18 груш.

Ответ без обоснования – 1 балл. Полное обоснование с правильным ответом – 5 баллов.

5. Так как Толя и Саша в сумме выиграли 9 турниров, эта сумма могла распределиться между ними одним из следующих способов 9 = 8 + 1 = 7 + 2 = 6 + 3 = 5 + 4. Поскольку больше всех турниров выиграл Сергей, легко убедиться, что только в последнем случае сумма выигрышей Толи, Саши и Сергея будет меньше 16: 8 + 5 + 4 = 15. Следовательно, Андрей выиграл один турнир.

Ответ без обоснования – 0 баллов, верный ответ с полным обоснованием – 3 балла.

6. Из условия задачи следует, что k должно делиться на 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Конечно, произведение этих чисел удовлетворяет условию задачи, однако, результат можно значительно уменьшить. Для этого заметим, что если число делится на 9, то оно делится на 3; если оно делится на 8, то делится на 4; если число делится на 8 и на 9, то оно делится на 6. Следовательно, мы можем исключить из выписанного набора числа 3, 4, 6 и 8. Тогда получим наименьшее число $5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2520$

Ответ без обоснования – 0 баллов, произведение всех натуральных чисел от 3 до 9 – 2 балла, правильный ответ с полным обоснованием – 8 баллов.

7. Первым взвешиванием сравниваем друг с другом две произвольные монеты.

Если весы оказались в равновесии, значит на них лежат настоящие монеты. Тогда вторым взвешиванием, сравнивая одну из этих двух монет с третьей, мы узнаем, легче фальшивая монета или тяжелее.

Если весы оказались не в равновесии, то заменяем любую из монет, например, тяжелую, третьей монетой. Если весы оказались в равновесии, значит, на них настоящие монеты, и фальшивая монета тяжелее. Если весы оказались не в равновесии (легко понять, что возможен только такой же результат взвешивания, который был в первый раз, иначе все монеты будут различными, что противоречит условию), то настоящими будут снятая с весов и третья монеты, и фальшивая должна быть легче настоящей. Аналогично анализируются варианты, если заменить легкую монету третьей.

Всего 4 балла.

8. Пусть производительности труб равны a_1, a_2, a_3, время заполнения бассейна t, объем бассейна V. Тогда имеем уравнение $(a_1 + a_2 + a_3)t = V$. После увеличения производительности первой трубы в 2 раза, время заполнения бассейна станет $t_1 = 0{,}8t$, и мы получаем еще одно уравнение $0{,}8(2a_1 + a_2 + a_3)t = V$. Сравнивая эти уравнения, получаем $a_1 t = \frac{V}{4}$. Аналогично поступая в следующем случае, получаем уравнение

$0,6(a_1+2a_2+a_3)t=V$, из которого следует $a_2t=\frac{2V}{3}$. Тогда легко находим $a_3t=\frac{V}{12}$. Сравнивая полученные выражения, делаем вывод, что наиболее производительна вторая труба.

Ответ без обоснования – 0 баллов. Правильный ответ с полным обоснованием – 7 баллов.

9. Пусть число прямоугольников 2×3 равно n, а прямоугольников 1×6 m. Тогда из условия равенства площадей получаем уравнение $6n+6m=768 \Rightarrow n+m=128$. Периметры этих прямоугольников равны 10 и 14 соответственно, следовательно, их суммарный периметр составит $10n+14m$. Так как длины общих сторон соседних прямоугольников дают удвоенную длину распилов, а границы исходного прямоугольника в распилах не участвовали, получаем второе уравнение $10n+14m=708\cdot 2+56\cdot 2=1528 \Rightarrow 5n+7m=764$. Решая полученную систему, получаем $n=66, m=62$. Убедимся, что разрезание с найденными числами прямоугольников возможно. Для этого достаточно заметить, что прямоугольниками 4×6 можно замостить весь исходный квадрат, а составить такой прямоугольник можно либо, использовав по 4 прямоугольника 2×3 или 1×6, либо по 2 прямоугольника каждого вида. Тогда 31 прямоугольник 4×6 составляем из 2 размером 2×3 и 2 размером 1×6, а один прямоугольник 4×6 заполняем только прямоугольниками 2×3.

Ответ без обоснования – 0 баллов. Получено уравнение, связывающее площадь исходного прямоугольника и сумму площадей фигур – 2 балла. Получено уравнение, связывающее суммарный периметр всех фигур с общей длиной распилов и периметром исходного прямоугольника – 4 балла. Решена система уравнений и получен верный ответ – 3 балла. Приведен пример разрезания – 1 балл. Всего 10 баллов.

10. Из исходных данных перебором возможных расцветок легко находим единственно возможное распределение маек и бейсболок между друзьями: Петя – синие майка и бейсболка; Витя – белая майка и зеленая бейсболка; Коля – зеленая майка и белая бейсболка.

Ответ без обоснования – 1 балл. Полное решение с логическими выводами - 5 баллов.