Олимпиада по математике

5 класс

Решения и критерии оценивания

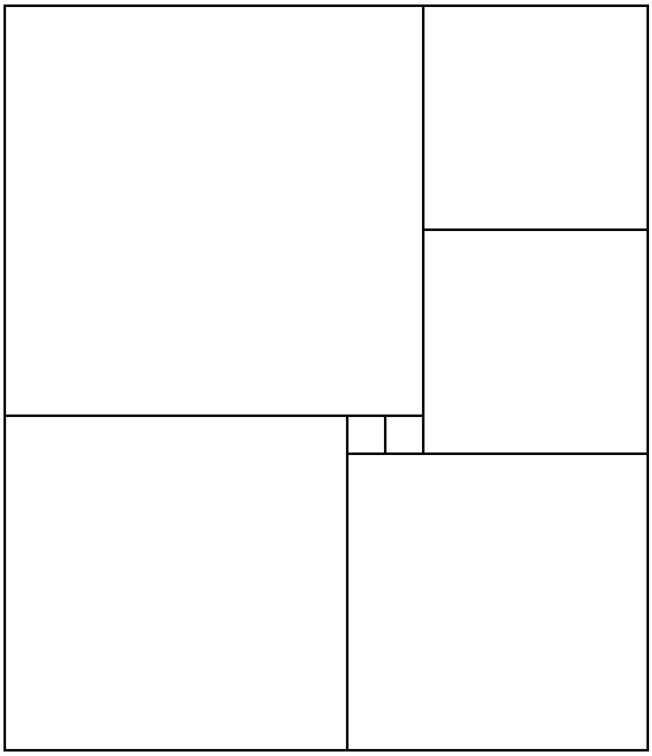
1. Рассмотрим несколько первых действий согласно условиям задачи для нахождения закономерностей в процессе. Через минуту на доске будет число 33, через 2 минуты – число $3\cdot3+15=24$, через 3 минуты – число $2\cdot4+15=23$, через 4 минуты – число $2\cdot3+15=21$, через 5 минут – число $2\cdot1+15=17$, через 6 минут – число $1\cdot7+15=22$, через 7 минут – число $2\cdot2+15=19$, через 8 минут – число $1\cdot9+15=24$. Теперь очевидно, что далее процесс будет циклически повторяться с периодом 6 минут. То есть, число, которое появится на доске через 60 минут, совпадает с числом, которое было на доске через 6 минут. Значит, это число 22.

Ответ без обоснования – 1 балл, установлена закономерность и определен ее период – 3 балла, получен правильный ответ с использованием найденного периода – 7 баллов. Любое альтернативное и верно обоснованное решение задачи также оценивается из 7 баллов.

2. Кладем на одну чашу весов все монеты из первой кучки, а на другую чашу весов – 15 монет из второй или третьей кучки. Если весы будут в равновесии, значит в первой кучке все монеты настоящие. В противном случае все монеты настоящие в кучке, из которой монеты для взвешивания не брались.

Любой правильный алгоритм взвешивания, позволяющий однозначно определить кучку с настоящими монетами – 7 баллов.

3. Пример деления прямоугольника на квадраты показан на рисунке.



Его образуют квадраты со сторонами 11 (левый верхний), 9 (левый нижний), 8 (правый нижний), 6 (два одинаковых квадрата справа вверху и справа в центре), 1 (два центральных квадрата).

Любое верное разбиение прямоугольника – 7 баллов.

4. Так как число рыцарей меньше числа строк и столбцов, найдется строка и столбец, в которых нет рыцарей, то есть в них находятся только лжецы. Следовательно, говоря, что в одной строке и в одном столбце с ним находится одинаковое количество лжецов, эти лжецы скажут правду. Противоречие. Значит такого быть не может.

Ответ без обоснования – 0 баллов. Любое логически обоснованное правильное решение задачи – 7 баллов.

5. Номера кабинетов 3, 4, 5 и 6. Детей в этих кабинетах 20, 15, 12 и 10: 20 + 15 + 12 + 10 = 57. Все произведения равны 60.

Любой верный пример – 7 баллов.

6. Будем в ходе перестановок использовать в основном число 3. Первым ходом меняем местами числа 3 и 300 и получаем ряд 300, 6, 9,…, 297, 3. Вторым ходом меняем местами 3 и 6 и получаем ряд 300, 3, 9, 12,…, 297, 6. Далее меняем местами числа 3 и 297, затем 3 и 9 и т.д. В конце концов после 99 ходов ряд примет вид 300, 297,…, 153, 150, 3, 147,…, 6. После этого остается последовательно использовать число 3 с каждым из чисел, стоящих в ряду правее, каждый раз смещая тройку на одну позицию вправо. Таким образом, ряд удается перестроить в требуемом по условию порядке.

Ответ без обоснования – 0 баллов, использована идея перемещения чисел при помощи числа 3 и разработан правильный алгоритм перемещения – 7 баллов..

7. Так как у «Адмирала» больше всех очков, эта команда должна была выиграть больше всех матчей или при равенстве побед с другой командой, у «Адмирала» должно быть больше ничьих. Но в условии сказано, что количество ничьих у любой команды должно равняться числу побед или поражений. Из этого следует, что у «Адмирала» должно быть, как минимум на одну победу и одну ничью больше, чем у команды, оказавшейся на втором месте. Следовательно, по итогам турнира у «Адмирала» должно быть на 3 очка больше, чем у второй команды. Так как за один тур разность очков между двумя командами может измениться не более, чем на 2 очка, «Адмирал» перед последним туром также должен быть на первом месте.

Обоснованный правильный ответ – 7 баллов.

8. Единственный возможный вариант последних цифр искомых чисел – это две семерки, так как другие произведения 9×9 и 9×7 заканчиваются единицей и тройкой. Следовательно, из разряда единиц в разряд десятков будет при умножении перенесена цифра 4. Тогда в разряде десятков должны умножаться цифры 7 и 9, а в разряд сотен перейдет цифра 6. В разряде сотен могут перемножаться либо две девятки, либо семерка и девятка, в результате чего в разряд тысяч перейдут,

соответственно восьмерка и шестерка. Второй вариант мы уже рассмотрели, и если его выбирать далее, то первой цифрой произведения ни семерка, ни девятка стать не смогут. В случае переноса восьмерки в следующем разряде могут умножаться либо две семерки, либо две девятки, что приводит к переносу в очередной разряд, соответственно пятерки, либо восьмерки. Второй вариант будет всегда приводить к появлению на первом месте произведения цифры 8. В случае переноса пятерки в следующем разряде окажется четная цифра. Следовательно, таких чисел не существует.

Ответ без обоснования – 0 баллов. Правильный ответ с полным обоснованием – 7 баллов.

9. Разложим 2019 на простые множители: $2019 = 3 \cdot 673$. Следовательно, множители в левой части уравнения должны равняться 1, 3 и 673. Однако при любом выборе соответствия для числа 673, подобрать назначение для множителей 1 и 3 в левой части уравнения невозможно.

Использована идея разложения правой части уравнения на простые множители – 2 балла. Получен обоснованный верный ответ – 7 баллов.

10. Первоначально остатки от деления числа хамелеонов разного цвета на 3 равны, соответственно, 1, 0 и 2. При каждой встрече численность хамелеонов двух цветов уменьшается на 1, а численность хамелеонов третьего цвета увеличивается на 2. Следовательно, после первой встречи остатки от деления на 3 числа хамелеонов разных цветов составит (0, 2, 1), после второй - (2, 1, 0), после третьей - (1, 0, 2). При дальнейших перекрашиваниях, очевидно, эти наборы станут периодически повторяться. Если все 30 хамелеонов приобрели одинаковую окраску, остатки от деления на 3 их численности должны иметь вид (0, 0, 0). Следовательно, это невозможно.

Ответ без обоснования – 0 баллов. Использована идея анализа динамики численности хамелеонов на основе остатков от деления на 3 – 2 балла. Получен правильный обоснованный ответ - 7 баллов.