

Олимпиада по математике ЦРР 2020

Тренировочные задачи

5-6 класс

1. У одноклассниц Маши и Светы одинаковое количество тетрадей. Они купили одинаковые наборы наклеек с котиками. Маша наклеила на 7 тетрадей по одному котик, а на остальные — по 7 котиков. Света наклеила на 11 тетрадей по одному котик, а на остальные — по 11 котиков. Сколько котиков было в наборе, если каждая девочка израсходовала весь набор?

2. В финале комбинированного чемпионата мира по скалолазанию шесть спортсменов соревнуются в трёх дисциплинах. В каждой из них они распределяют между собой места с первого по шестое (дележей мест не бывает). Окончательный результат каждой спортсменки — произведение трёх занятых мест. Финальные результаты оказались такими: Янья — 5, Сол — 12, Джессика — 24, Акийо — 54, Михо — 64, Петра — 75. Как распределились места в первой дисциплине, если известно, что у Яньи она самая слабая из трех?

3. Клетки квадрата размером 3×3 заполнили цифрами от 1 до 9, взятыми по одному разу, и подсчитали сумму чисел в каждой строке и в каждом столбце. Какое наибольшее количество идущих подряд целых чисел может быть среди этих сумм?

4. Перед Петей выставили в ряд пять гири. Ему известно, что это гири массами 19 г, 20 г, 20 г, 20 г, 21 г, стоящие в каком-то порядке, при этом гири массами 19 г и 21 г стоят рядом. У Пети есть электронные весы, которые показывают массу положенного на них груза. Помогите Пете за два взвешивания определить массу каждой гири.

5. В Стране дураков ходят монеты в 1, 2, 3, . . . , 19, 20 сольдо (других нет). У Буратино была одна монета. Он купил мороженое и получил одну монету сдачи. Снова купил такое же мороженое и получил сдачу тремя монетами разного достоинства. Буратино хотел купить третье такое же мороженое, но денег не хватило. Сколько стоит мороженое?

6. В большой квадратный зал привезли два квадратных ковра, сторона одного ковра вдвое больше стороны другого. Когда их положили в противоположные углы зала, они в два слоя накрыли 4 м^2 , а когда их положили в соседние углы, то 14 м^2 . Каковы размеры зала?

7. Два пирата, Билл и Джон, имея каждый по 74 золотые монеты, решили сыграть в такую игру: они по очереди будут выкладывать на стол монеты, за один ход — одну, две или три, а выиграет тот, кто положит на стол сотую по счёту монету. Начинает Билл. Кто может выиграть в такой игре, независимо от того, как будет действовать соперник?



7 класс

1. Столяр распилит шахматную доску на клетки за 70 минут. За какое время он распилит такую же доску на квадраты размером 2×2 клетки? (Размеры шахматной доски — 8×8 клеток. Время распила пропорционально его длине.)

2. Два математика решили пообедать в кафе. Общая стоимость их заказов составила 770 рублей. Первый математик сказал: «Суммарное количество блюд, которые мы заказали, — простое число». Второй математик ответил: «Если ты такой умный, то я отдам тебе пряник стоимостью 64 рубля и после этого средняя стоимость блюд у каждого из нас увеличится на один рубль». Сколько рублей потратил каждый из них на свой заказ?

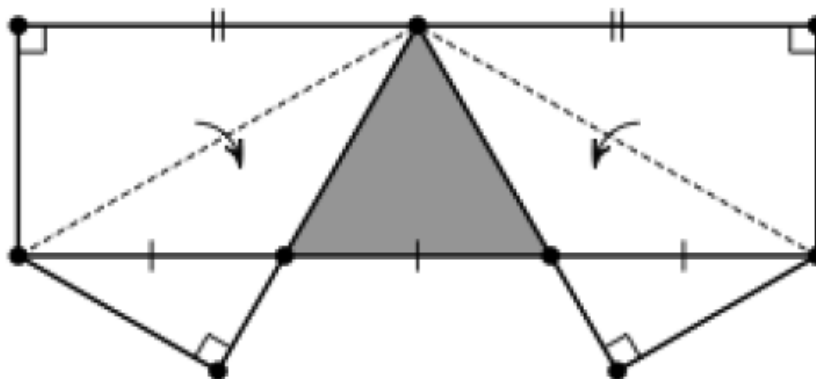
3. Трём мудрецам показали 9 карт: шестёрку, семёрку, восьмёрку, девятку, десятку, валета, даму, короля и туза (карты перечислены по возрастанию их достоинства). После этого карты перемешали и каждому раздали по три карты. Каждый мудрец видит только свои карты. Первый сказал: «Моя старшая карта — валет». Тогда второй ответил: «Я знаю, какие карты у каждого из вас». У кого из мудрецов был туз?

4. Дан прямоугольный параллелепипед, у которого все измерения (длина, ширина и высота) — целые числа. Известно, что если длину и ширину увеличить на 1, а высоту уменьшить на 2, то объём параллелепипеда не изменится. Докажите, что какое-то из измерений данного параллелепипеда кратно трём.

5. В турнире по волейболу каждая команда встречалась с каждой по одному разу. Каждая встреча состояла из нескольких партий — до трёх побед одной из команд. Если встреча заканчивалась со счётом $3 : 0$ или $3 : 1$, то выигравшая команда получала 3 очка, а проигравшая — 0. Если же счёт партий был $3 : 2$, то победитель получал 2 очка, а побеждённый — 1 очко. По итогам турнира оказалось, что команда «Хитрецы» набрала больше всех очков, а команда «Простаки» — меньше всех. Но «Хитрецы» выиграли меньше встреч, чем проиграли, а у «Простаков» наоборот, победных встреч оказалось больше, чем проигранных. При каком наименьшем количестве команд такое возможно?

6. Буратино выложил на стол 2016 спичек и предложил Арлекину и Пьеро сыграть в игру, беря по очереди спички со стола: Арлекин может своим ходом брать либо 5 спичек, либо 26, а Пьеро — либо 9, либо 23. Не дождавшись начала игры, Буратино ушёл, а когда он вернулся, партия уже закончилась. На столе осталось две спички, а проиграл тот, кто не смог сделать очередной ход. Хорошенько подумав, Буратино понял, кто ходил первым, и кто выиграл. Выясните это и вы!

7. Два угла прямоугольного листа бумаги согнули так, как показано на рисунке. Противоположная сторона при этом оказалась разделённой на три равные части. Докажите, что закрасненный треугольник — равносторонний.



8 класс

1. На острове рыцарей и лжецов рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. В школе на этом острове учатся как рыцари, так и лжецы — в одном классе. Однажды учитель спросил у четырёх детей — Ану, Бану, Вану и Дану — кто из них сделал домашнее задание. Они ответили:

— Ану: Домашнее задание сделали Бану, Вану и Дану.

— Бану: Домашнее задание не сделали Ану, Вану и Дану.

— Вану: Не верьте им, господин учитель! Ану и Бану — лжецы!

— Дану: Нет, господин учитель, Ану, Бану и Вану — рыцари!

Сколько рыцарей среди этих детей?

2. Найдите наибольшее трёхзначное число, которое кратно сумме своих цифр и в котором первая цифра совпадает с третьей, но не совпадает со второй.

3. Найдите наименьшее натуральное N такое, что N делится (без остатка) на 12, $N + 2$ — на 14, $N + 4$ — на 16, а $N + 6$ — на 18.

4. Папа, мама, дедушка, бабушка и маленький Алёша сажали картофель. Если бы папа сажал картофель в два раза быстрее, то они бы потратили на 18% меньше времени на посадку. Если бы мама сажала в два раза быстрее, то они потратили бы на 12% меньше времени. Если бы дедушка сажал в два раза быстрее, то потратили бы на 10% меньше времени. Если бы бабушка сажала в два раза быстрее, то они потратили бы на 8% меньше времени. На сколько процентов меньше времени они бы потратили, если бы Алёша сажал картофель в два раза быстрее?

5. Даны три числа a , b , c . Известно, что среднее арифметическое чисел a и b на 5 больше среднего арифметического всех трёх чисел. А среднее арифметическое чисел a и c на 8 меньше среднего арифметического всех трёх чисел. На сколько среднее арифметическое чисел b и c отличается от среднего арифметического всех трёх чисел?

6. Фирма проводила опрос сотрудников — какими социальными сетями они пользуются: ВКонтакте или Одноклассниками. Некоторые сотрудники ответили, что используют ВКонтакте, некоторые — Одноклассников, некоторые сказали, что используют обе социальные сети, а 40 сотрудников сказали, что не пользуются соц. сетями. Среди всех, кто использует соц. сети, ВКонтакте используют 75%, а 65% — обе сети. Доля тех сотрудников, которые используют Одноклассников, от общего числа всех сотрудников равна $5/6$. Сколько всего сотрудников работает в фирме?

7. В трапеции известны длины диагоналей — 6 и 8, а также длина средней линии — 5. Найдите высоту трапеции.



9 класс

1. В четырёхугольнике ABCD известно, что $AB = BC$, $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$. Из вершины B опущен перпендикуляр BH на сторону AD. Найдите площадь четырёхугольника ABCD, если известно, что $BH = h$.

2. Число 2015 можно представить в виде суммы последовательных целых чисел различным образом, например $2015 = 1007 + 1008$ или $2015 = 401 + 402 + 403 + 404 + 405$. Сколькими способами это можно сделать?

3. Пятеро бегунов бежали эстафету. Если бы первый бежал в два раза быстрее, то они бы потратили на 5% меньше времени. Если бы второй бежал в два раза быстрее, то потратили бы на 10% меньше времени. Если бы третий бежал в два раза быстрее, то потратили бы на 12% меньше времени. Если бы четвёртый бежал в два раза быстрее, то потратили бы на 15% меньше времени. На сколько процентов меньше времени они бы потратили, если бы пятый бежал в два раза быстрее?

4. Вовочка подошел к игровому автомату, на экране которого горело число 0. В правилах игры было написано: «На экране показано число очков. Если кинуть монетку в 1 руб., то число очков увеличится на 1. Если кинуть монетку 2 руб., то число очков удвоится. Если набрать 50 очков, то автомат выдаёт приз. А если получилось число, большее 50, то все набранные очки сгорают.» За какое минимальное количество рублей Вовочка сможет получить приз?

5. Робот движется по прямолинейным участкам, при этом совершая повороты через каждую минуту на 90 градусов направо или налево (временем на поворот пренебречь). За минуту робот проходит 10 метров. На каком минимальном расстоянии от начального положения он может оказаться через 9 минут после начала движения, если в течение первой минуты робот не поворачивал?

6. Расстояние между корнями квадратного трёхчлена $x^2 + px + q$ равно 1. Найдите коэффициенты p и q , если известно, что они являются простыми числами.

7. На круглом столе через равные промежутки лежат пирожные. Игорь ходит вокруг стола и съедает каждое третье встреченное пирожное (каждое пирожное может быть встречено несколько раз). Когда на столе не осталось пирожных, он заметил, что последним взял пирожное, которое встретил первым, и прошел ровно 7 кругов вокруг стола. Сколько было пирожных?

