Олимпиада по математике ЦРР

7 класс

Решения и критерии оценивания

1. Пусть число юношей в группу равно n, а девушек m. Из условия задачи следует система линейных неравенств $\begin{cases} 7n+2m>36 \\ 8n+4m<48 \end{cases}$. Из второго неравенства следует, что $n<6$. Выражая из неравенств переменную m, получаем для нее двойное неравенство $18-\frac{7}{2}n<m<12-2n$, из которого следует $36-7n<24-4n \Rightarrow n>4$. Единственное натуральное число, удовлетворяющее этим неравенствам $n=5$. Тогда $m=1$.

2. Докажем утверждение задачи от противного. Предположим, что в наборе чисел $a_1,\dots,a_{70}$ нет пары чисел, отличающихся на 4, 5 или 9. Рассмотрим новый набор чисел вида $a_1,\dots,a_{70},a_1+4,\dots,a_{70}+4,a_1+9,\dots,a_{70}+9$. Чисел в этом наборе 210, самое большое из них не превышает 209. Следовательно, чисел не может быть больше 209. Противоречие.

3. Обозначим первоначальный объем молока в банках через V. Легко устанавливается закономерность: при первом, третьем,..., $2n-1, (n=1, 2,\dots)$ переливании во вторую банку добавляется $\frac{V}{2n}$ объема молока, в результате чего в ней оказывается становится равным $V+\frac{V}{2n}=\frac{V(2n+1)}{2n}$, а в первой банке остается $V-\frac{V}{2n}=\frac{V(2n-1)}{2n}$. После этого делается второе, четвертое,..., $2n, (n=1, 2,\dots)$ переливание, при котором в первую банку добавляется $\frac{V(2n+1)}{2n(2n+1)}=\frac{V}{2n}$ объема молока, и в ней становится $\frac{V(2n-1)}{2n}+\frac{V}{2n}=V$, следовательно, во второй банке объем молока также равен V. Таким образом, после каждой пары переливаний объемы молока в банках становятся равными исходным. То есть после 38 переливания в банках имеется объем молока V. Тогда при 39 переливании во вторую банку добавляется $\frac{V}{40}=5$ г молока и в ней оказывается 200 + 5 = 205 г.

4. Докажем утверждение задачи от противного. Разобьем числа на 2 группы: 5 самых маленьких и 4 самых больших. Пусть суммы чисел в группах равны А и В, тогда по условию $A>B$. Пусть меньшее из чисел первой группы $a_1\le 0$. Перенесем это число из первой группы во вторую. Тогда А не уменьшается, а В не увеличивается, то есть знак неравенства сохраняется. Но это противоречит условию, так как теперь в А 4

числа, а в В – 5 чисел. Следовательно, меньшее из чисел, а значит и все остальные – положительны.

5. Так как числа в тройках одинаковы, их суммы равны, откуда следует $c = c^2 \Rightarrow c = 0;1$. Равенство других чисел в этих тройках возможно в случае $b = a + 3$. Тогда получаем $2a + 3 + c = 513 \Rightarrow 2a + c = 510$. Отсюда следует, что c может равняться только 0, значит, $a = 255$, $b = 258$. Отсюда получаем $a^2 + b^2 + c^2 = 258^2 + 255^2 = 131589$.

6. Оценка. Выделим в данном квадрате любой меньший квадрат размером 6×6. Его можно разделить на 9 меньших квадратов размером 2×2. В каждом таком квадрате должна быть хотя бы одна закрашенная клетка. Следовательно, меньше 9 закрашенных клеток быть не может.

Пример. На рисунке представлена схема закрашивания, при которой будет закрашено ровно 9 клеток.

	X		X		X	
	X		X		X	
	X		X		X	

7. Первым взвешиванием сравниваем гири массами 1, 4, 7 и 10 граммов с гирями массами 2, 3, 8 и 9 граммов. Выводы, которые можно сделать по результатам взвешивания, а также следующие из них вторые взвешивания приведены в таблице.

Первое взвешивание	Возможные нарушения маркировки и выводы	Второе взвешивание	Выводы
1 + 4 + 7 + 10 = 2 + 3 + 8 + 9	2 и 3; 5 и 6; 8 и 9	2 + 6 = 3 + 5	Перепутаны гири 8 и 9
		2 + 6 < 3 + 5	Перепутаны гири 5 и 6
		2 + 6 > 3 + 5	Перепутаны гири 2 и 3
1 + 4 + 7 + 10 > 2 + 3 + 8 + 9	1 и 2; 4 и 5; 7 и 8	1 + 5 = 2 + 4	Перепутаны гири 7 и 8
		1 + 5 > 2 + 4	Перепутаны гири 1 и 2
		1 + 5 < 2 + 4	Перепутаны гири 4 и 5
1 + 4 + 7 + 10 < 2 + 3 + 8 + 9	3 и 4; 6 и 7; 9 и 10	3 + 7 = 4 + 6	Перепутаны гири 9 и 10
		3 + 7 > 4 + 6	Перепутаны гири 3 и 4
		3 + 7 < 4 + 6	Перепутаны гири 6 и 7

8. Очевидно, что наибольшее количество ответов «Мальчик» можно получить, если большинство стоящих в круге представляют говорящих правду мальчиков, или говорящих неправду девочек. Если все стоящие в круге – мальчики, то все они правду говорить не могут, так как кто-то из них ответил «Девочка». Если один из них говорит неправду, тогда ответов «Девочка» будет 2, следовательно, возможно, что нужных ответов будет 98. Допустим, что таких ответов 99 и предположим, что ответ «Девочка» дал один из стоящих в круге на вопрос «Кто стоит слева от тебя?». Если он сказал правду, значит слева от него стоит девочка. Тогда стоящий слева от девочки должен был дать такой же ответ, если он говорит правду. Следовательно, ответов «Девочка» будет уже 2. Значит, стоящий слева от девочки должен говорить неправду. Продолжая это движение по кругу, получаем, что девочки должны стоять через одно место, а стоящие между ними должны говорить неправду. Но давший ответ «Девочка» по нашему предположению сказал правду. Противоречие. Допустим теперь, что ответивший «Девочка» сказал неправду. Тогда слева от него стоит мальчик, а справа – девочка. Тогда стоящий правее девочки должен говорить неправду, значит, правее его –снова девочка. Продолжая это движение по кругу, приходим к выводу, что говорящие неправду стоят через одного, и возле них стоят девочки. Но левее давшего ответ «Девочка» стоит мальчик. Противоречие. Таким образом, наибольшее число ответов «мальчик» 98.

9. Рассмотрим двузначное число, образованное двумя последними цифрами А. Среди двузначных чисел, делящихся на 17 или 23, только 85 оканчивается на 5, значит, предпоследняя цифра числа А равна 8. Берем теперь двузначное число, образованное цифрами, стоящими в А на 2 и 3 месте справа. Аналогичный анализ показывает, что из чисел, делящихся на 17 или 23, только 68 оканчивается на 8. Значит, третья справа цифра – 6. Продолжая это движение справа налево, последовательно находим числа 46(4, в скобках записываем цифры, которые должны стоять на соответствующем месте числа А), 34(3), 23(2), 92(9), 69(6). Далее, очевидно, цифры начнут повторяться, то есть последние цифры числа А имеют вид ...6923469234685. Период последовательности равен 5. На 2012 месте в числе А стоит цифра 2, следовательно, на 42 месте тоже будет стоять 2.

10. Всего по пути из левого нижнего угла в правый верхний можно сделать 15 единичных перемещений, каждое из которых будет либо вправо, либо вверх. Если сопоставить перемещениям вправо множество номеров ходов, на которых мы будем эти перемещения совершать, тогда задача становится стандартной комбинаторной

задачей о подсчете числа способов, которыми можно из 15-элементного множества выбрать 5-элементное подмножество. Результат, очевидно, не изменится, если мы будем подсчитывать всевозможные подмножества, состоящие из номеров ходов вверх. Получаем $N = C_{15}^{5} = C_{15}^{10} = \frac{15!}{5! \cdot 10!} = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 3003$.