Олимпиада по математике

9 класс

Решения и критерии оценивания

1. Очевидно n - неотрицательное число. Пусть $9^n+16=m^2$, тогда $9^n=(m-4)(m+4)$. Это уравнение имеет решение $n=1, m=5$. Так как разность множителей в правой части уравнения (8) не является степенью девятки, других решений уравнение не имеет.

Ответ без обоснования – 1 балл. Любое правильное решение – 7 баллов.

2. Так как все переменные положительны, доказываемое неравенство равносильно неравенству $xy+yz+zx \geq xyz(x+y+z)$.

а) Из верного неравенства $(x-y)^2 \geq 0$ следует $\frac{x^2+y^2}{2} \geq xy$. С учетом этого $x^2+y^2+z^2=\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{y^2+z^2}{2}+\frac{z^2+x^2}{2} \geq xy+yz+zx$, откуда следует $xy+yz+zx \leq 3$, а из этого неравенства в свою очередь следует $(xy+yz+zx)^2 \leq 3(xy+yz+zx)$.

б) Неравенство $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ равносильно неравенству $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$. Из этого следует $(xy+yz+zx)^2 \geq 3(x^2yz+xy^2z+xyz^2)=3xyz(x+y+z)$.

Объединяя результаты пунктов а) и б), получаем $(xy+yz+zx) \geq \frac{1}{3}(xy+yz+zx)^2 \geq xyz(x+y+z)$, что и требовалось доказать.

Любое правильное доказательство – 7 баллов.

3. Обозначим точки через $A_i, i=\overline{1,16}$. Рассмотрим произвольную хорду, проходящую через A_1. По разные стороны от этой хорды должно находиться четное число точек (иначе одна из хорд гарантированно пересечет рассматриваемую). Из этого следует, что A_1 можно соединить с $A_2, A_4, ..., A_{16}$, и по разные стороны от этих хорд будут находиться множества точек: 0 и 14, 2 и 12, 4 и 10, 6 и 8. Будем обозначать количество способов соединить непересекающимися хордами $2n$ точек символом $X_{2n}, n=0,1,...$ Очевидно $X_0=0$. Две точки можно соединить единственным способом, следовательно $X_2=1$. Четыре точки можно соединить непересекающимися хордами двумя способами: например, если это точки A_2, A_3, A_4, A_5, то есть два набора хорд A_2A_3 и A_4A_5 или A_2A_5 и A_3A_4. Таким образом, $X_4=2$ Если точек 6 (например, $A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$), то имеется 5 способов их соединения системой непересекающихся хорд, что следует из количества способов представить 6 – 2 = 4 точки в виде двух дуг, содержащих четное количество точек и числа способов соединить эти точки на каждой из дуг непересекающимися хордами: $X_6=2X_4+X_2 \cdot X_2=2\cdot 2+1\cdot 1=5$ (здесь использовалось правило произведения для подсчета общего числа способов провести хорды между точками каждой из дуг). Аналогично находим $X_8=2X_6+2X_4 \cdot X_2=2\cdot 5+2\cdot 2\cdot 1=14$,

$X_{10}=2X_8+2X_6\cdot X_2+X_4\cdot X_4=2\cdot 14+2\cdot 5\cdot 1+2\cdot 2=42$,

$X_{12}=2X_{10}+2X_8\cdot X_2+2X_6\cdot X_4=2\cdot 42+2\cdot 14\cdot 1+2\cdot 5\cdot 2=132$,

$X_{14}=2X_{12}+2X_{10}\cdot X_2+2X_8\cdot X_4+X_6\cdot X_6=2\cdot 132+2\cdot 42\cdot 1+2\cdot 14\cdot 2+5\cdot 5=429$. Наконец, возвращаясь к всему множеству точек, находим

$$X_{16}=2X_{14}+2X_{12}\cdot X_2+2X_{10}\cdot X_4+2X_8\cdot X_6=2\cdot 429+2\cdot 132\cdot 1+2\cdot 42\cdot 2+2\cdot 14\cdot 5=1430.$$

Ответ без обоснования – 1 балл. Правильная закономерность изменения числа способов в зависимости от количества точек с допущенными арифметическими ошибками – 3 балла. Правильный обоснованный ответ – 7 баллов.

4. Пусть $x+y^2=p$, $x+2y=q$, где $p,q\in Q$. Вычитая почленно, получаем $y^2-2y+r=0$, где $r=q-p\in Q$. Выберем значение r так, чтобы квадратное уравнение имело иррациональные корни, например, $r=-2$. Тогда $y=1\pm\sqrt{3}$, и можно взять $q=2$, что дает $x=\mp 2\sqrt{3}$.

Любой правильный пример, удовлетворяющий условиям задачи – 7 баллов.

5. Оценка. Пронумеруем все корзины и рассмотрим две произвольные корзины, например, с номерами 1 и 2. Действие по перекладыванию камней из первой корзины уменьшает разность количества камней в первой и второй корзинах на 10, а аналогичное действие со второй корзиной увеличивает эту разность на 10. Действия с другими корзинами эту разность не изменяют. Следовательно, для того, чтобы количество камней в двух первых корзинах стало различным, необходимо, чтобы с ними было произведено разное количество действий. Тогда наименьшее количество действий равно $0+1+2+...+9=45$.

Пример. Из первой корзины камни не берем ни разу, из второй – один раз и т.д, из 10-й корзины камни берем 9 раз. На действия с 10-й корзиной потребуется $9\cdot 9=81$ камней, так что исходного количества в 100 камней для этого хватит.

Ответ без обоснования – 1 балл. Любое правильное решение задачи – 7 баллов.

6. Так как трехчлен не имеет корней, его график не пересекает ось OX. Так как $y(1)=a+b+c>0$, график расположен в верхней полуплоскости. Так как $c=y(0)$ - координата точки пересечения графика с осью OY, эта точка также располагается в верхней полуплоскости, следовательно, коэффициент c положительный.

Ответ без обоснования – 0 баллов. Любое правильное решение задачи – 7 баллов.

7. На первом ходу Икс должен взять 4 шарика, а затем каждый раз будет брать по одному шарику. Так как Игрек может взять только нечетное число шариков, после каждого его хода в этом случае в ящике будет оставаться нечетное число шариков. Так как после каждого хода число шариков в ящике уменьшается, ясно, что рано или поздно в нем останется ровно один шарик. Взяв его, Икс побеждает.

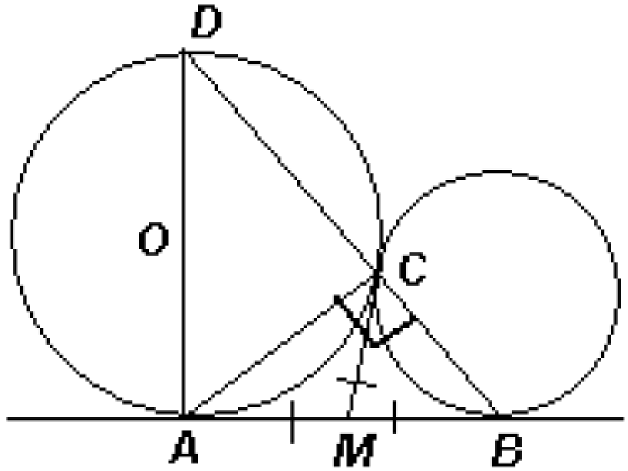
Ответ без обоснования – 0 баллов. Предложена выигрышная стратегия для Икс, и обоснована его победа на основе постоянного уменьшения числа шариков и их нечетности после очередного хода Игрек.

8. Пусть $2m$ - наибольшее, а $2n$ - наименьшее из первоначальных чисел. После очередного хода $2m$ не увеличивается, а количество чисел, равных $2n$, уменьшается. Действительно, к числу, равному $2m$ будет добавлено число, не превосходящее m, а вычтут из него число, равное m. Аналогичные рассуждения справедливы для чисел, равных $2n$. Таким образом, в процессе преобразований $2m$ не изменяется либо уменьшается, а $2n$ увеличивается (возможно, не после каждого хода). Следовательно, через несколько ходов для чисел в круге будет выполнено условие $m = n$, и всякие изменения прекратятся.

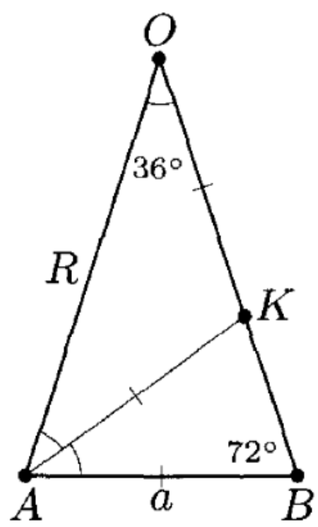
Любое обоснованное решение задачи – 7 баллов.

9. Проведем общую внутреннюю касательную к данным окружностям, которая проходит через точку C. Пусть она пересекает прямую AB в точке M (см. рисунок). Так как отрезки касательных, проведенных из одной точки, равны, то $MA = MB = MC$. Следовательно, треугольник ACB прямоугольный и $\angle ACB = 90^0$. Тогда $\angle ACD = 90^0$, и AD – диаметр. Следовательно, $DA \perp AB$.

Любое правильное решение задачи – 7 баллов.



10. Рассмотрим равнобедренный треугольник AOB, в котором AO = OB = R, $\angle AOB = 36^0$ (см. рисунок).



Проведем биссектрису АК. Тогда $\angle AKB = 72^0$ и $AK = OK = AB$. Пусть АВ = a. Тогда по свойству биссектрисы треугольника $\frac{AO}{AB} = \frac{OK}{BK} \Rightarrow \frac{R}{a} = \frac{a}{R-a} \Rightarrow a^2 + Ra - R^2 = 0$. Это квадратное уравнение имеет решение $a = R\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Таким образом, решение задачи сводится к построению равнобедренного треугольника с боковыми сторонами R и основанием $R\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Для решения этой задачи:

1) задаемся некоторым произвольным масштабом (отрезком) длины R;

2) строим отрезок длины $R\sqrt{5}$ при помощи построения прямоугольного треугольника с катетами R и 2R (гипотенуза в нем равна $R\sqrt{5}$);

3) строим отрезок длины $R(\sqrt{5}-1)$;

4) делим этот отрезок пополам;

5) строим треугольник.

Угол при вершине построенного треугольника равен 36^0.

Построение треугольника по трем сторонам является элементарным, и его описывать не надо. Это же относится к построению отрезка, равного разности двух данных отрезков и построению прямоугольного треугольника по двум катетам.

Любое правильное решение задачи – 7 баллов.