Олимпиада по математике

7 класс

Решения и критерии оценивания

1. Так как один из жителей всегда говорит правду, сумма чисел на лбах у двух других жителей четная. Это возможно в случаях, когда оба числа четные или оба – нечетные. Кроме того, поскольку сумма всех трех чисел нечетная, делаем вывод, что у правдивого жителя на лбу нечетное число. Так как каждый из двух оставшихся жителей лжец, их высказывания ложны, и сумма чисел на лбах, которые они видят, является нечетной. Следовательно, на лбах лжецов должны быть написаны четные числа. Поскольку произведение двух четных чисел делится на 4, остаток от деления на 4 произведения всех чисел равен нулю.

Ответ без обоснования – 1 балл. Установлено, какой четности числа написаны на лбу каждого жителя – 5 баллов. Определен остаток от деления на 4 произведения всех чисел – 2 балла. Всего 7 баллов.

2. Пронумеруем числа в круге от 1 до 100, начиная с произвольного числа. Найдем наименьшее общее кратное чисел 23 и 19. Это 437. Согласно условию, сумма 19 последовательных наборов, состоящих из 23 чисел каждый (с 1 по 23, с 24 по 46 и т.д., после достижения 100 номера идем на новый круг) положительна, а сумма 23 последовательных наборов из 19 чисел отрицательна. Поскольку в каждой совокупности содержатся одни и те же 437 чисел, обе суммы должны быть одинаковы. Противоречие.

Ответ без обоснования – 0 баллов. Любое правильное решение задачи – 7 баллов.

3. Назовем три персика, оказавшиеся на одной из чаш весов при первом взвешивании красными, а на другой чаше - желтыми. Красные персики не могли оказаться все вместе на чаше с четырьмя персиками при втором взвешивании, так как их вес равен половине веса всех персиков, следовательно, чаша с 4 персиками должна была перевесить. На чаше с двумя персиками при втором взвешивании также не могло оказаться двух красных персиков, так как их вес меньше половины веса всех персиков. Следовательно, при втором взвешивании на одной чаше должны лежать по два красных и желтых персика, а на другой чаше – один красный и один желтый. Следовательно, на чаше с четырьмя персиками два желтых персика заменили один красный (или наоборот) по сравнению с первым взвешиванием, и вес чаши не изменился. Значит, один из персиков весит столько же, сколько два других.

Любое непротиворечивое доказательство – 7 баллов.

4. Рассмотрим сначала леопардов. За последние 2 года в масках леопардов было 30 зверей. По условию это разные звери, и это – не леопарды. Следовательно, леопардов на острове не более 10. Аналогично рассматривая случай львов, приходим к выводу, что львов на острове не более $40-25-10=5$. Тигров на острове не больше $40-28=12$. Тогда волков на острове не меньше $40-10-5-12=13$. Следовательно, больше всех на острове волков.

Использована идея оценки числа зверей каждого вида сверху – 2 балла. Получены верные оценки для трех видов животных – 3 балла. Установлен вид с наибольшей численностью – 2 балла. Всего – 7 баллов. Любое правильное альтернативное решение – 7 баллов.

5. Предположим, что в 1 песо 60 центов. Тогда мелкие монеты содержат, соответственно 15, 12 и 10 центов. Так как при расчетах использовалось целое число монет, проживание стоит целое число центов. Это число должно быть в промежутке от 1 до 4 центов (иначе 1 песо не хватит). Рассмотрим возможные варианты стоимости проживания.

1. Стоимость составляет 4 цента. Тогда за 13 дней нужно заплатить 52 цента, а на руках у туриста останется 8 центов. Но монеты содержат не менее 10 центов, поэтому это невозможно.

2. Стоимость равна 3 цента. За 14 дней будет заплачено 42 цента, и у туриста остается 18 центов. Но набрать 18 центов никакой комбинацией монет невозможно.

3. Стоимость равна 2 цента. За 11 дней должно быть заплачено 22 цента, и у туриста должно остаться 38 центов. Легко проверить, что и в этом случае не существует такой комбинации монет.

4. Стоимость равна 1 цент. За 7 дней турист должен заплатить 7 центов, и у него должно остаться 53 цента. Так как число нечетное, количество не четных слагаемых (по 15 центов) тоже должно быть нечетным, то есть 1 или 3. Значит, сумма, образованная монетами в 10 и 12 центов, должна равняться 38 или 8 центов. Ни в одном случае набрать ее такими монетами невозможно.

Ответ без обоснования – 0 баллов. Любое верное и обоснованное решение – 7 баллов.

6. Будем искать группы подряд стоящих участников олимпиады, среди которых поровну математиков и химиков. Можно убедиться, что условиям задачи удовлетворяют цепочки из 10 участников вида ФФМФФМФФХХ и 14 участников вида ФФМФФМФФМФФХХХ. Для получения 66 физиков необходимо сначала 7 раз повторить цепочку первого вида, затем 3 раза цепочку второго вида. Всего получится $7 \cdot 6 + 3 \cdot 8 = 66$ физиков.

Ответ без обоснования и примера - 0 баллов. Любой правильный пример – 7 баллов.

7. Рассмотрим возможные остатки от деления на 7 первоначального числа бриллиантов у гоблинов. Семи различных остатков от 0 до 6 быть не может, так как сумма остатков будет делиться на 7, следовательно, общее число бриллиантов также должно делиться на 7. Но 2020 на 7 не делится. Значит, для каких-то двух гоблинов остатки от деления числа бриллиантов на 7 должны быть одинаковы. Если у них одинаковое число бриллиантов, то обиженными ни один из них быть не может. Следовательно, при дальнейшем перераспределении количество бриллиантов у них будет только уменьшаться, причем одинаковым образом. Значит, этот процесс ограничен во времени начальным количеством бриллиантов.

Если у этих двух гоблинов начальное число бриллиантов различно (отличается на число, кратное 7), то при каждом перераспределении количество бриллиантов у них либо уменьшается на 1, либо, если «бедный» гоблин обижен, то у него число бриллиантов увеличивается на 6, а у «богатого» уменьшается на 1. В обоих случаях остатки от деления на 7 числа бриллиантов у них не меняются.

Поскольку «богатый» гоблин обиженным быть не может, число бриллиантов у него может только уменьшаться. При каждом обогащении «бедного» гоблина его разрыв с «богатым сокращается на 7 бриллиантов. Следовательно, через некоторое время число бриллиантов у них станет одинаковым, в результате чего мы получим разобранный выше случай.

Использована идея анализа остатков от деления на 7 и сделан вывод о наличии двух гоблинов с одинаковыми остатками – 2 балла. Получено решение для случая, когда имеются два гоблина с одинаковым первоначальным числом бриллиантов – 2 балла. Полное решение задачи – 7 баллов.

8. Выигрывает первый игрок. Для этого он первым ходом удаляет из набора число 27. После этого первый игрок разбивает все оставшиеся числа на группу (5, 10, 15, 20, 25 и 26), а остальные – на пары с суммой 25: 1 и 24, 2 и 23 и т.д. Если второй игрок удаляет одно из чисел пары, то первый удаляет второе число из этой пары. Если второй удаляет одно из чисел группы, то первый удаляет самое большое из оставшихся чисел группы. В результате число 26 будет гарантированно стерто. После 25 ходов в наборе могут остаться либо два числа из группы, либо одна из пар.

Ответ без обоснования – 0 баллов. Любой правильный алгоритм действий первого игрока – 7 баллов.

9. Очевидно, что диагонали четырехугольника не могут быть перпендикулярными, так как в этом случае все четыре треугольника были бы прямоугольными. Пусть О – точка пересечения диагоналей, и треугольник АОВ – прямоугольный с прямым углом ABO. Тогда угол AOB - острый, следовательно, угол COD тоже острый (эти углы равны как вертикальные. Значит углы BOC и AOD - тупые. Значит из четырех треугольников два должны быть тупоугольными. Следовательно, четвертый треугольник тупоугольный.

Ответ без обоснования 0 баллов. Любое правильное решение задачи – 7 баллов.

10. Из неравенства треугольника, согласно которому сумма длин двух наименьших сторон больше длины наибольшей стороны, следует, что стороны треугольника не меньше двух. Так как биссектриса делит угол на две равные части, перпендикулярные биссектриса и медиана не могут выходить из одной вершины. Рассмотрим треугольник АВС, в котором CD – медиана, AE – биссектриса. Так как биссектриса и медиана перпендикулярны, в треугольнике ACD биссектриса является высотой, следовательно, треугольник равнобедренный. Тогда $AC = AD = BD = \frac{1}{2}AB$.

Следовательно, $AB = 2AC$. Так как разность наибольшего и наименьшего числа среди трех последовательных натуральных чисел равна 2, это равенство возможно (с учетом того, что все стороны не меньше 2) только при $AC = 2, BC = 3, AB = 4$.

Применено неравенство треугольника и установлено, что длины сторон треугольника не меньше 2 – 1 балл. Установлено, что биссектриса и медиана должны выходить из разных вершин – 1 балл. Доказано, что одна из сторон треугольника вдвое больше другой – 2 балла. Найдены стороны треугольника – 2 балла. Всего – 7 баллов.