Олимпиада по математике

6 класс

Решения и критерии оценивания

1. При любой перестановке переменных $(a,b,c) \to (b,c,a) \to (c,a,b)$ левая часть выражения останется неизменной. Это возможно только в случае $a=b=c$, откуда следует, что все переменные равны единице. Из этого вытекает доказываемое утверждение.

Другое доказательство.

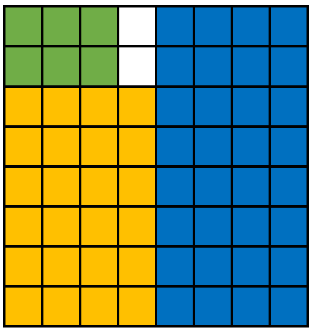
$$\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca}=\frac{1}{1+a+ab}+\frac{a}{a+ab+abc}+\frac{ab}{ab+abc+abc\cdot a}=$$
$$\frac{1}{1+a+ab}+\frac{a}{1+a+ab}+\frac{ab}{1+a+ab}=\frac{1+a+ab}{1+a+ab}=1.$$

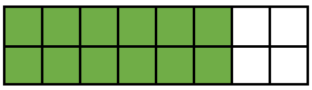
Любое обоснованное верное доказательство – 7 баллов.

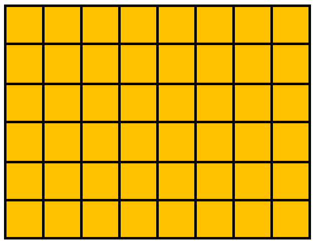
2. Разделим числитель и знаменатель выражения на 2. Тогда знаменатель примет вид $\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2019\cdot 2020}$. Учитывая, что $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, преобразуя все слагаемые в разности дробей и сокращая одинаковые, получаем, что знаменатель дроби равен $1-\frac{1}{2020}=\frac{2019}{2020}$. Тогда значение исходной дроби равно 2020.

Ответ без обоснования 1 балл. Любое алгебраически корректное получение правильного ответа – 7 баллов.

3. Пусть белых клеток x, тогда зеленых $3x$, а желтых $12x$. Общее число клеток, находящихся в желтых прямоугольниках, равно $3x+12x=15x$. Так как это число должно быть четным и большим нуля, подходят только $x=2$ и $x=4$. В этих случаях количество синих клеток составит, соответственно, $64-30-2=32$ и $64-60-4=0$. Примеры полученных раскрасок приведены на рисунках.







Ответ без обоснования – 1 балл, найдены два возможных решения – 6 баллов, приведены подтверждающие решения варианты раскраски – 7 баллов.

4. Если бы оппортунист был лжецом, то первая фраза была бы правдой, то есть в городе жило бы 25 лжецов. Так как это говорит не лжец, а оппортунист, на самом деле лжецов в городе 24. Аналогично, если бы оппортунист был лжецом, то вторая фраза тоже была бы правдой, и в городе жили бы 26 рыцарей. Следовательно, рыцарей в самом деле 26. Если бы оппортунист был лжецом, то третья фраза была бы правдой, и оппортунистов было бы не меньше 26. На самом деле, с учетом говорящего, оппортунистов на одного больше, то есть не меньше 27. Если бы оппортунист был рыцарем, то третья фраза была бы ложью, то есть оппортунистов было бы меньше, чем рыцарей. Следовательно, с учетом говорящего оппортунистов не больше 27. Таким образом, оппортунистов ровно 27. С учетом анализа двух первых высказываний, находим, что всего в городе $24+26+27=77$ жителей.

Ответ без обоснования – 0 баллов. Определено количество лжецов и рыцарей – 3 балла. Найдено количество оппортунистов – 4 балла. Всего – 7 баллов.

5. Рассмотрим варианты, которые запомнил Буратино. Если последние цифры 2010, тогда среди последних цифр чисел должно быть не более одной пятерки (если пятерок больше одной, тогда произведение должно делиться на 25, следовательно, число, составленное из 4 последних цифр произведения должно делиться на 25, а 2010 на 25 не делится) и не более одной четной цифры, не делящейся на 4, то есть либо одна двойка, либо одна шестерка (произведение 5 на число, кратное 4, даст произведение, которое делится на 20, а 2010 на 20 не делится). Следовательно, из последних цифр чисел мы должны исключить 4 четверки, 4 пятерки и 7 из 8 двоек плюс шестерок. Всего получается 15 исключенных цифр, следовательно, набрать 14 цифр из 28 для размещения на последнем месте в двузначных числах невозможно. Аналогично в случае 2012 на последних местах не могут стоять пятерки. Так как 2012 не делится на 8, из четных цифр на последние места в числах мы можем выбрать либо одну четверку, либо две четные цифры, не делящиеся на 4. Так как двоек и шестерок в сумме 8, минимальное количество «запрещенных» четных цифр равно 10. Тогда вместе с пятерками «запрещенных» цифр будет не меньше 15, значит, мы опять не сможем набрать 14 цифр для разряда единиц в числах. Таким образом, единственным возможным вариантом является число 2016.

Ответ без обоснования – 0 баллов. Обосновано исключение одного из вариантов 2010 или 2012 – 3 балла, обосновано исключение обоих вариантов – 7 баллов.

6. В сумме 5 и 6 августа за грибами ходили 30 человек. Так как ежедневно ходят за грибами 9 человек, то за два дня они совершили совместно 18 походов, а вместе с теми, кто собирает грибы через день, 30 раз ходили за грибами. Следовательно, 5 и 6 августа за грибами ходили только две первых группы любителей грибов. При этом среди 13 человек 5 августа было 9 грибников, собирающих грибы ежедневно, и 4 человека, ходящих за грибами через день. Значит, 7 августа за грибами пойдут 9 человек, собирающих грибы ежедневно, 4 человека, собирающих грибы через день, и 8 человек, которые ходят за грибами раз в три дня. То есть всего 21 человек.

Ответ без обоснования – 0 баллов. Установлено, что в первые два дня за грибами могли ходить только две первых группы грибников – 3 балла. Найдено, сколько человек, собирающих грибы через день, были в лесу 5 августа, следовательно, пойдут в лес 7 августа – 2 балла. Полное решение задачи – 7 баллов.

7. Всего имеется 298 троек подряд сидящих персонажей. Согласно условию, среди них должно быть 149 троек, в которых больше гномов и 149 троек, в которых больше орков. Оценим максимально возможное число гномов. Среди троек, где больше орков, гномов не может быть более $\frac{1}{3}$ (если гномов окажется хотя бы 50, то найдется тройка, в которой гномов больше, чем орков). Следовательно, в таких тройках гномов не больше 49, а орков не меньше 100. Такой вариант реализовать возможно. Например, 149 гномов сидят подряд, а к ним примыкают тройки вида «орк, орк, гном». Ответ – 100 орков.

Ответ без обоснований – 0 баллов. Получена оценка минимального количества орков – 4 балла. Приведен пример расположения персонажей за столом – 3 балла. Всего – 7 баллов.

8. Число 1024, как и все его делители, является степенью двойки. Значит, каждым ходом любая кучка (большая 1) будет разбиваться на чётное количество новых куч. Тем самым, общее количество куч будет всегда увеличиваться на нечётное число. Значит, количество куч после хода первого игрока всегда чётно, а после хода второго – нечётно. Так как игра закончится, когда образуются 1024 кучки по 1 камню, то последний ход был сделан первым игроком. Значит, побеждает второй игрок, вне зависимости от стратегии.

Ответ без обоснования – 0 баллов. Установлено, что после любого хода первого игрока число куч четно, а после хода второго нечетно – 5 баллов. Сделан вывод о победе второго игрока при любой стратегии играющих – 2 балла. Всего – 7 баллов.

9. Занумеруем монеты числами от 1 до 6. Отдаем эксперту произвольные 3 монеты, например, с номерами 1, 2 и 3. Если эксперт сообщает, что в наборе больше фальшивых монет, тогда настоящих больше в наборе с номерами 4, 5 и 6. Перенумеруем монеты так, чтобы этот набор теперь имел номера 1, 2 и 3, а набор, который отдавали эксперту – номера 4, 5 и 6. Заменим монету 1 на монету 4, и отдадим эксперту на оценку набор монет с номерами 2, 3 и 4. Если фальшивых монет стало больше, значит, мы заменили настоящую монету фальшивой, и монета 1 – настоящая. Если по-прежнему настоящих монет среди набора (2, 3, 4) больше, заменяем монету 2 монетой 5 и отдаем

набор (3, 4, 5) на оценку эксперту. Если фальшивых стало больше, значит монета 2 – настоящая. Если же настоящих снова больше, значит 3 монета настоящая, а 6 – фальшивая, так как теперь, если мысленно (без отправки эксперту) заменить 3 монету на 6, фальшивых будет больше, поскольку в наборе (4, 5, 6) больше фальшивых монет.

Логически обоснованное полное решение – 7 баллов.

10. Из условия следует, что 2020 – 44 = 1976 делится на n. Разложим 1976 на простые множители: $1976 = 2^3 \cdot 13 \cdot 19$. Из всех делителей числа 1976 необходимо выбрать числа, превышающие 44. Таких чисел 8: 1976, 988, 494, 247, 152, 104, 76 и 52.

Использована идея анализа делителей числа 1976 – 4 балла. Отобраны делители, превышающие 44 – 3 балла. Всего – 7 баллов.