Олимпиада по математике ЦРР

9 класс

Решения и критерии оценивания

1. Последовательно применяя условия задачи, получаем

$$f(0)=c\in Z;$$
$$f(1)=a+b+c\Rightarrow(a+b)\in Z;$$
$$f(2)=4a+2b+c=2a+2(a+b)+c\Rightarrow 2a\in Z.$$

Рассмотрим $f(x)=ax^2+bx+c=ax^2-ax+ax+bx+c=ax(x-1)+x(a+b)+c=\dfrac{2ax(x-1)}{2}+x(a+b)+c$.

В числителе первого слагаемого есть $2a\in Z$, а также x и $x-1$, то есть два последовательных целых числа, одно из которых является четным, следовательно $\dfrac{x(x-1)}{2}$ - целое число. Два последних слагаемых, очевидно, также целые, следовательно, вся сумма будет целой.

2. Рассмотрим выражение

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{ab}-\frac{1}{bc}-\frac{1}{ac}=\frac{1}{2a^2}-\frac{1}{ab}+\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{2b^2}-\frac{1}{bc}+\frac{1}{2c^2}+\frac{1}{2c^2}-\frac{1}{ca}+\frac{1}{2a^2}=$$
$$\frac{a^2-2ab+b^2}{2a^2b^2}+\frac{b^2-2bc+c^2}{2b^2c^2}+\frac{c^2-2ca+a^2}{2c^2a^2}=\frac{(a-b)^2}{2a^2b^2}+\frac{(b-c)^2}{2b^2c^2}+\frac{(c-a)^2}{2c^2a^2}$$

Его правая часть неотрицательна вследствие неотрицательности всех слагаемых. Поскольку левая часть является следствием разности $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{a+b+c}{abc}$, неравенство доказано.

3. Оценка. Предположим, что неинтересных встреч вообще не было. Это возможно только в случае, когда команда с рейтингом 16 (она, очевидно, выиграла турнир) встречалась с командами, имеющими рейтинги от 12 до 15 (всего команда с рейтингом 16 должна была провести 4 встречи). Это в свою очередь возможно только в случае, когда эти команды друг с другом не играли. Значит, в первом туре 3 из этих 4 команд должны были сыграть с тремя командами с меньшим рейтингом, во втором туре 2 из них сыграли еще 2 встречи с командами с меньшим рейтингом, и наконец в третьем туре одна из этих команд играла с командой с меньшим рейтингом. То есть всего они должны были сыграть с 6 различными командами с меньшим рейтингом. Это, очевидно, невозможно, так как кому-нибудь надо было сыграть с командами с

рейтингом 6 и 7. Следовательно, предположение неверно, и хотя бы одна неинтересная встреча была.

Пример. Первый тур: 1 – 5, 2 – 6, 3 – 7, 4 – 8, 9 – 13, 10 – 14, 11 – 15, 12 – 16. Второй тур: 5 – 6, 7 – 8, 13 – 14, 15 – 16. Третий тур: 6 – 8, 14 – 16. Финал: 8 – 16. Согласно этому примеру, была всего одна неинтересная встреча.

4. Обозначим длину прыжка через d и заметим, что d не может быть кратно p, иначе блоха после каждого прыжка будет приземляться в исходную точку, что противоречит условию. Пусть блоха сделала n прыжков к моменту возврата в исходную точку и совершила за это время m оборотов. Тогда мы получаем уравнение $dn = mp$. Поскольку d не кратно p, и p не является составным числом, это уравнение будет иметь решения только в случае, когда n кратно p. Поскольку повторения положений блохи, очевидно, начнутся при $n = p$, делаем вывод, что блоха должна сделать ровно n прыжков к моменту возвращения в исходную точку, то есть она побывает во всех p точках.

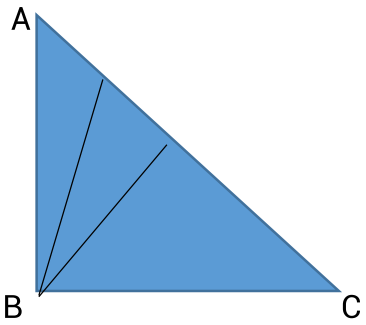
5. Оценка. Докажем, что меньше 6 ладей на доске быть не может. Предположим противное – на доске 5 ладей. Доску можно разделить на 6 прямоугольных полосок 2×12 (не ограничивая общности можно считать, что большие стороны полосок горизонтальны). Очевидно, что для одной из полосок ладьи не найдется, следовательно, в ней должны стоять кони. Разделим эту полоску на 3 прямоугольника 2×4. Очевидно, что по крайней мере один прямоугольник будет пересекаться максимум одной вертикалью с ладьей. Легко проверить, что независимо от места пересечения, в этом прямоугольнике найдется пара коней (все остальные клетки должны быть заняты конями), бьющих друг друга. Следовательно, предположение неверно, и меньше 6 ладей быть не может.

6 ладей на доске исключают для коней все клетки горизонталей, на которых они стоят. Кроме того, они исключают половину клеток горизонталей, на которых ладьи не стоят. Таким образом, для коней остаются доступными $\frac{1}{4} \cdot 12^2 = 36$ клеток. То есть максимально возможное число коней 36.

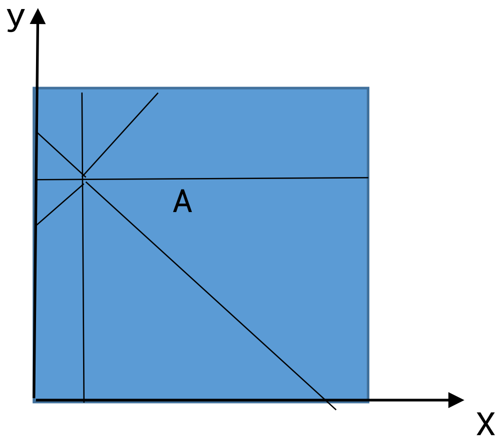
Пример. На рисунке показано расположение коней (к) и ладей (л), отвечающее полученной выше оценке.

К			К	К			К	К			К
	Л										
		Л									
К			К	К			К	К			К
К			К	К			К	К			К
					Л						
						Л					
К			К	К			К	К			К
К			К	К			К	К			К
									Л		
										Л	
К			К	К			К	К			К

6. Рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник, в вершине прямого угла которого находится волк, а в вершинах острых углов – две собаки. Обозначим катет этого треугольника через а. Пусть волк нацелился на точку, расположенную на расстоянии х от основания высоты, опущенной из вершины прямого угла. Тогда волку до этой точки необходимо пробежать $\sqrt{\frac{a^2}{2}+x^2}$ со скоростью v. Дальней собаке (понятно, что ближняя успеет до этой точки добраться быстрее), находящейся в вершине С, необходимо пробежать расстояние $\frac{a}{\sqrt{2}}+x$ со скоростью $\frac{3}{2}v$. Сравним времена собаки и волка $\frac{\sqrt{\frac{a^2}{2}+x^2}}{v} \vee \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}+x}{\frac{3}{2}v} \Rightarrow \frac{9}{4}(\frac{a^2}{2}+x^2) \vee \frac{a^2}{2}+ax\sqrt{2}+x^2 \Rightarrow$ $\frac{5}{8}a^2-ax\sqrt{2}+\frac{5}{4}x^2 \vee 0$. Дискриминант трехчлена отрицательный, следовательно, волку бежать дольше до любой точки, в том числе, до собаки в вершине А. Таким образом, две собаки полностью блокируют возможность волка выбежать из квадрата, прибегая раньше волка вдвоем в любую точку гипотенузы, если они будут занимать позиции, симметричные относительно основания высоты, опущенной на любую сторону квадрата, образуя с волком равнобедренный прямоугольный треугольник.



Введем теперь прямоугольную систему координат с началом в левом нижнем угле квадрата и поместим волка в точку A с координатами (x, y), полагая для определенности $x < y$ и считая, что A находится в левой верхней четверти квадрата.



Тогда длины перпендикуляров, опущенных на левую, верхнюю, правую и нижнюю стороны квадрата, равны соответственно $x, 1-y, 1-x, y$. Размещая собак согласно описанной выше схемы, получаем их координаты $(0, y-x), (0, y+x), (x+1-y, 1), (x+y, 0)$. Как видно из рисунка, собаки располагаются в точках пересечения биссектрис прямых углов, образованных прямыми, проходящими через A и параллельными сторонам квадрата. Легко проверить, что любая пара смежных биссектрис может быть достроена до равнобедренного прямоугольного треугольника, следовательно, каждая пара соседних собак соответствует проведенному выше анализу.

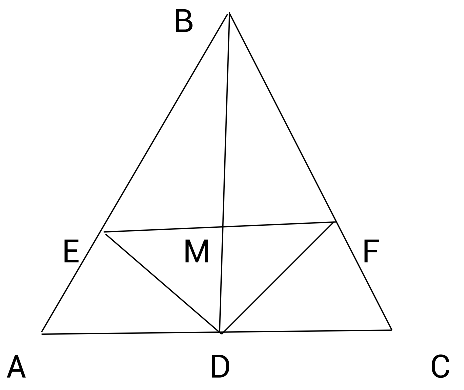
Таким образом, собаки не выпустят волка из квадрата.

7. Рассмотрим произведение двух условий задачи $(x^2-x)(y^2-y) \in Q$. Преобразуя это произведение, получаем $\begin{array}{l} x(x-1)y(y-1) = xy(x-1)(y-1) \Rightarrow (x-1)(y-1) \in Q \Rightarrow \\ xy - x - y + 1 \in Q \Rightarrow 1 - x - y \in Q \Rightarrow (x+y) \in Q \end{array}$.

Пусть $x + y = z \in Q$. Тогда $xy = x(z-x) = xz - x^2 + x - x = x(z-1) - (x^2 - x)$. Второе слагаемое рационально по условию, следовательно, первое тоже должно быть рационально. Так как x иррационально, это возможно только в случае, когда $z = 1$.

Действительно, если $x(z-1)=k\in Q \Rightarrow x=\dfrac{k}{z-1}\in Q$, получили противоречие. Таким образом, окончательно, $x+y=1$.

8. Рассмотрим данный треугольник



Из ΔABD по теореме об отрезках, на которые биссектриса делит сторону треугольника следует $\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{BE}{BD}$.

Аналогично из ΔBDC получаем $\dfrac{FC}{DC}=\dfrac{BF}{BD}$.

Тогда с учетом $AD=DC$ находим $\dfrac{AE}{FC}=\dfrac{BE}{BF}$. Следовательно, согласно обобщению теоремы Фалеса $EF \parallel AC$.

В ΔMDF $\angle MFD=\angle FDC$, как накрест лежащие. Следовательно, ΔMDF - равнобедренный, и $DM=MF$. Аналогично в ΔDEM находим $DM=EM$. Тогда $2DM=EM+MF=EF \Rightarrow DM=\dfrac{EF}{2}=3$.

9. Если какой-либо листочек мы разрываем на 4 куска, то общее число кусочков увеличивается на 3, а если на 6 кусочков, то на 5. Получить 9 кусочков можно, разрывая начальный листок на 4 части, а затем любой из имеющихся кусочков еще на 6 частей (1→4→9). Чтобы получить 10 кусочков нужно 3 раза подряд разрывать один из имеющихся в наличии кусочков на 4 части (1→4→7→10). Наконец, чтобы получить 11 кусочков нужно 2 раза разорвать один из имеющихся в наличии кусочков на 6 частей (1→6→11). Несложно сообразить, что все остальные числа, начиная с 12, мы можем получить при помощи чисел 9, 10, 11, увеличивая их на $3n, n\in N$, разрывая один из имеющихся в наличии кусочков на 4 части.

10. Определим общее число знакомств участников: $N=\frac{44\cdot 27}{2}=594$. При этом число знакомств друг с другом среди 22 описанных в условии участников равно $\frac{22^2}{2}=242$. Тогда с остальными участниками олимпиады каждый ребенок из этой группы имеет по 5 знакомств, всего $22\cdot 5=110$. Среди оставшихся 22 участников число знакомств с представителями этой группы, очевидно, также 110. Тогда число знакомств друг с другом у второй группы участников равно $594-242-110=242$. Применяя полученный выше результат для первой группы, приходим к выводу, что во второй группе все участники также знакомы друг с другом. Таким образом, первую группу образуют попарно знакомые друг с другом участники олимпиады, а вторую – все остальные участники.