Олимпиада по математике

6 класс

Решения и критерии оценивания

1. Пусть десятичная запись числа X имеет вид $\overline{abc} = 100a + 10b + c$. Тогда $Y = 10b + c,\ Z = 10a + b$. Из условия следует уравнение $100a + 10b + c - 44b = 10b + c + 10a + b \Rightarrow 90a = 45b \Rightarrow b = 2a$. Очевидно, что X имеет наибольшее значение при $a - 4,\ b = 8,\ c = 9$, то есть число равно 489.

Ответ без обоснования – 1 балл, составлено уравнение на основе десятичной записи числа – 3 балла, получено верное решение этого уравнения, приводящее к максимальному X – 3 балла, всего – 6 баллов.

2. Перебор возможных вариантов с учетом ограничений задачи позволяет выделить единственный вариант: Иван – физика и информатика; Евгений – информатика, Михаил – математика.

Ответ без обоснования 0 баллов. Верное решение с вытекающими из условия логическими построениями – 3 балла.

3. Пусть искомое число $\overline{xy} = 10x + y$. Тогда получаем уравнение $(10x + y)^2 = (x + y)^3$. Проанализируем возможные варианты цифры y. 1. Если $y = 1$, то квадрат числа оканчивается на 1, следовательно, сумма цифр числа должна оканчиваться на 1, что невозможно. 2. Если $y = 2$, то квадрат числа оканчивается на 4, а сумма цифр должна оканчиваться на 4, что также невозможно, так как цифры должны быть различны. 3. При $y = 3$ единственный вариант $x = 6$, но $63^2 \neq 9^3$. 4. При $y = 4$ единственный вариант $x = 2$, но $24^2 \neq 6^3$. 5. Если $y = 5$, или $y = 6$, то x подобрать не удается. 6. При $y = 7$, находим $x = 2$, и $27^2 = 9^3 = 729$. 7. При $y = 8$, единственный вариант $x = 6$, но $68^2 \neq 14^3$. 8. Наконец, если $y = 9$, то $x = 2$, но $29^2 \neq 11^3$. Следовательно, искомое число 27.

Ответ без обоснования – 1 балл, полное обоснование с верным ответом – 7 баллов.

4. Таня выигрывает. Для этого ему необходимо первым ходом стереть все восьмерки. После этого получается набор, состоящий из одинакового количества двоек и троек, четверок и пятерок, шестерок и семерок. Поэтому в дальнейшем Таня должна повторять ходы Марины, используя симметричный по количеству набор цифр. Например, если Марина стирает какое-то количество четверок, то Таня стирает такое же количество пятерок и т.д. Очевидно, что у Тани всегда найдется ответ на любой ход Марины.

Ответ без обоснования – 0 баллов. Представлена выигрышная стратегия, использующая идею симметрии – 6 баллов.

5. После вычеркивания нечетных цифр из первых 10 чисел останутся 5 цифр 2, 4, 6, 8 и 0. От второго десятка чисел останутся 6 цифр 2, 4, 6, 8, 2, 0. Легко сообразить, что такое число цифр останется также от четвертого, шестого и восьмого десятков. От третьего (а также пятого и седьмого) десятков останется 14 цифр: 2, 2, 2, 2, 2, 4, 2, 2, 6, 2, 2, 8, 2, 0. Тогда можно сделать вывод, что на 61-м месте будет стоять 10-я цифра, оставшаяся в 7-м десятке. Эти цифры 6, 6, 2, 6, 6, 4, 6, 6, 6, 6, 6, 8, 6, 0. На 10-м месте стоит цифра 6.

Ответ без обоснования – 0 баллов. Полное обоснование с правильным ответом – 5 баллов.

6. Высота стопки складывается из высоты нижней вазы и $n-1$ «ободков», на которые следующая ваза выступает над предыдущей. Отсюда следует уравнение для первой стопки $x+9y=50$ (здесь x – высота вазы, y – высота ободка). Для второй стопки аналогично получаем $x+24y=95$. Из этих уравнений находим $y=3, x=23$. Следовательно, высота вазы 23 см.

Ответ без обоснования – 0 баллов. Составлена и решена система уравнений в натуральных числах – 5 баллов.

7. По формуле включений-исключений число ученых равно $10+9+8-4-5-3+x=15+x$, где x - число ученых, являющихся специалистами во всех трех науках. Из условия следует, что x не может быть больше 3, поэтому всего рабочих не больше 18.

Ответ без обоснований – 1 балл. Применена формула включений-исключений – 5 баллов. Применена оценка числа ученых, являющихся специалистами во всех 3 науках – 2 балла, всего – 7 баллов.

8. Из первого условия задачи следует, что число братьев и сестер у Светы может равняться 2 и 0, 3 и 1 и т.д.. Из второго условия можно сделать вывод, что у Вали сестры есть, и единственный вариант, соответствующий первому условию, это – 3 брата и сестра. Так как Света, очевидно, девочка, то Валиной сестрой является именно она. Поскольку других сестер у Вали нет, делаем вывод, что Женя – мальчик. Кроме этого можно сделать вывод, что Валя тоже девочка.

Ответ без обоснования – 0 баллов. Полное решение с описанием следующих из.условия логических выводов – 6 баллов.

9. Составим таблицу результатов взвешиваний, в ходе которых сначала сравниваем вес гирь в 1 и 2 грамма с гирей в 3 грамма, а вторым взвешиванием сравниваем вес гирь в 1 и 3 грамма с гирей в 4 грамма.

Результат первого взвешивания	Результат второго взвешивания	Логический вывод
1 + 2 = 3	1 + 3 > 4	Из первого взвешивания следует, что все гири правильные, значит дефектная – последняя. Из второго взвешивания следует, что гиря в 4 грамма легче номинала.
1 + 2 = 3	1 + 3 < 4	То же самое, только гиря в 4 грамма весит больше номинала.
1 + 2 > 3	1 + 3 = 4	Из первого взвешивания следует, что гиря в 4 грамма – правильная. Из второго взвешивания следует, что гири в 1, 3 и 4 грамма – правильные, значит, дефектная гиря в 2 грамма, и она тяжелее номинала.
1 + 2 > 3	1 + 3 > 4	Из первого взвешивания делаем вывод, что либо одна из гирь в 1 или 2 грамма тяжелее номинала, либо гиря в 3 грамма легче номинала. Второе взвешивание исключает последний случай, а так как на весах осталась только гиря в 1 грамм из первого взвешивания, именно она является дефектной и весит больше номинала
1 + 2 > 3	1 + 3 < 4	Так как гиря в 4 грамма правильная, то гиря в 2 грамма не может быть больше номинала, иначе при втором взвешивании было бы равновесие. Аналогично, гиря в 1 грамм не может весить больше номинала, так как тогда при втором взвешивании перевесила бы другая чашка весов. Следовательно, дефектная гиря в 3 грамма, и она легче номинала.

Остальные варианты разбираются аналогично. Во всех случаях двух взвешиваний будет достаточно.

Ответ без обоснования – 0 баллов, верный ответ с полным перебором возможных случаев – 7 баллов.

10. Возьмем самый маленький по численности комитет А. Тогда нет комитета, который являлся бы его подмножеством. Дадим одному депутату из А удостоверение белого цвета, остальным депутатам из А – красного, а всем остальным, кто не входит в А – синего. Тогда в А есть два цвета – белый и красный. А любой другой комитет имеет общего депутата с А (красный или белый цвет) и имеет депутата, не входящего в А (синий цвет).

Любой верный пример раскраски – 7 баллов.