ЦЕНТР РАЗВИТИЯ РОБОТОТЕХНИКИ

представляет

Математические бои 2020

командные соревнования по математике

для учеников 5, 6 и 7 классов

29 марта 2020, Владивосток

www.robocenter.org

Дата и место проведения

Соревнования пройдут 29 марта 2020 в ДВФУ (корпус А, 12 уровень)

Цель

Матбой — это соревнование двух команд, основные цели которого проверка способностей команд:

. решать нестандартные задачи вместе всей командой;

. уметь отвечать решения у доски;

. проверять и оценивать чужие решения.

Команды

Математические бои – это соревнование команд учеников, каждая команда состоит из 4-6 участников. Соревнования будут проходить по трем возрастным группам: 5 класс, 6 класс и 7 класс. Чтобы заявить свое участие, каждая команда должна зарегистрироваться на специальном сайте до 15 марта 2020.

Капитаны

Капитан команды осуществляет связь команды с жюри и имеет следующие обязанности:

– Капитан отвечает за соблюдение его командой правил соревнования.

– Участвует в конкурсе капитанов. Если желает, он может определить другого члена команды принять участие в конкурсе капитанов.

– Делает вызовы, берет одноминутные паузы, определяет докладчика, когда его команда докладывает, и оппонента, когда его команда оппонирует.

Общая информация

Команды получают несколько (от 3 до 5) задач. Примеры задач приведены в Приложении 1, 2 и 3. У команд есть 1 час для решения задач. Это происходит в удобном для участников месте, о котором жюри заранее сообщает командам. Представитель жюри регулярно посещает команды и отвечает на вопросы по условиям задач. Во время решения задач участники не имеют право пользоваться компьютерами или внешними источниками. Они могут пользоваться сборниками, справочниками и другой литературой, которая заранее одобряется жюри.

В случае констатирования нарушений: использование Интернета, помощь от посторонних для команды людей, по усмотрению жюри, команда может получить наказание, отнятие очков, присуждение победы другой команде на конкурсе капитанов и т.д.

Вторая часть боев начинается сразу после решения задач. Все желающие могут присутствовать. Соревнование начинается конкурсом капитанов.

Решение задач

Есть джентльменское правило: прежде, чем решать задачи, команды сообщают жюри все задачи, решения которых им известны (матбой — это не клуб знатоков). Жюри исключает или заменяет эти задачи (предварительно проверив, что идея решения действительно известна).

Представитель жюри регулярно посещает команды и отвечает на вопросы по условиям задач. При этом каждое уточнение условий, данное одной команде, сразу же должно сообщаться и другой команде.

Жюри не должно давать информации о трудности задач. В процессе решения задач и во время боя команды не должны общаться и знать количество решенных задач у соперников.

Конкурс капитанов

Перед началом обсуждения необходимо определить, какая команда первой будет делать вызов. Для этого проводится Конкурс капитанов. Капитаны или по одному представителю команды выходят к доске и получают достаточно простую задачу на сообразительность. Кто раньше ответит правильно (доказывать не надо) тот выигрывает. Если ответ неверен, то победил другой капитан.

Капитан, победивший в конкурсе, определяет, какая команда сделает первый вызов.

Вызов

Капитан вызывающей команды сообщает номер задачи, решение которой команда хочет услышать, а другая команда отвечает, принят ли вызов.

Обычно команды вызывают друг друга по очереди, кроме в случае, описанном ниже, в котором есть проверка корректности и вызов оказался некорректным.

Если вызванная команда хочет отвечать, то она выставляет *докладчика*, а другая команда - *оппонента* для проверки решения.

Докладчик рассказывает решение. В процессе доклада оппонент и жюри имеют право задавать уточняющие вопросы. Жюри может прерывать докладчика, но используя лишь выражения типа: “это очевидно, можно не доказывать”, “повторите, пожалуйста, этот момент”. После чего докладчик закончил предъявление решения, оппонент задает вопросы, если решил, что необходимы дополнительные разъяснения.

Потом оппонент сообщает жюри свое мнение о решении (например, „ я согласен с решением” или “решение не принимается, т.к. такой-то факт не доказан, а на такой-то вопрос не получено удовлетворительного ответа”). Все спорные вопросы во время диалога между докладчиком и оппонентом решаются жюри.

Когда оппонент дает свое окончательное мнение о решении, жюри задает свои вопросы докладчику. Возможен случай, когда в решении имеются ошибки, не обнаруженные оппонентом, но замеченные жюри. В конце жюри определяет сколько очков присудить обеим командам и самому себе. Каждая задача стоит 12 очков, а жюри обосновывает свое решение перед командами. Докладчик получает очки, сообразно верности представленного решения и заключения оппонента. Оппонент получает очки в зависимости от обнаруженных им неточностей. Жюри получает очки, если обнаружило пробелы в решении, которые оппонент не заметил. Результаты записываются в протоколе в виде таблицы / с именами докладчика и оппонента и с номером докладываемой задачи/.

Во время дискуссии жюри может оштрафовать команду за шум, за подсказку или за неэтичное поведение (наказание может быть удаление участника или всей команды на определенное время или отнятие очков).

В любом моменте дискуссии, когда команда решит, что докладчик или оппонент нуждаются в помощи, командам могут даваться *минутные перерывы*. В рамках одной задачи каждая команда может пользоваться не больше, чем двумя одноминутными перерывами.

Возможно сделать проверку корректности вызова, когда вызванная команда захочет чтобы вызывающая команда предъявила решение. Тогда происходит перемена ролей команд.

Проверка корректности вызова происходит по следующей схеме:

Команда А вызывает команду Б, и команда Б требует проверки корректности, есть следующие возможности:

1сл. Если А откажется представить решение, команда Б и жюри получают по 6 очков, считается, что вызов был некорректен и снова А вызывает Б.

2 сл. Если А представит решение, для которого жюри дает ему не больше 6 очков и Б аргументировано не принимает „решение”, считается, что вызов некорректен и снова А вызывает Б.

3 сл. Если А представит решение и получит хотя бы 7 очков, вызов корректен и в следующем круге Б вызывает А.

4 сл. Если А представит решение, которому жюри даст не больше, чем 6 очков, но Б согласится с „решением”, считается, что вызов корректен и в следующем круге Б вызывает А.

Если вызванная команда отказалась отвечать, то вызывавшая команда имеет право рассказать решения тех задач, которые желает. Для каждой задачи команды определяют докладчика и оппонента, и очки присуждаются по вышеописанному способу.

После отказа от вызова команда до конца боя теряет право рассказывать решения задач и становится “вечным оппонентом”, т.е. может получать не больше 6 очков на задачу только за оппонирование.

Начисление очков

Каждая задача стоит 12 очков (чтобы не сообщать трудность задач). Эти очки распределяются между докладчиком, оппонентом и жюри (жюри достается остаток от 12 очков).

Очки даются как за положительный вклад в решение задачи, так и за нахождение ошибок и пробелов в решении. За чистое решение задачи дается 12 очков, а за “полное” оппонирование - 6 очков (если оппонент показал, что у докладчика совсем нет положительных результатов).

Сначала жюри определяет стоимость (в очках) рассказанной докладчиком части (он и получает эти очки) и стоимость каждой “дырки” в решении. За каждую найденную “дырку” оппонент получает половину стоимости этой “дырки” (если “дырку” нашло жюри, то оно и получает очки). Вторую половину стоимости этой “дырки” получит тот, кто ее “залатает” - докладчик (если ответит на вопрос оппонента), оппонент (при перемене ролей) или жюри (если никто “дырку” не закроет). При перемене ролей для подсчета очков применяют те же самые рассуждения.

Пример 1:

Докладчик рассказал решение. Оппонент нашел дырку-1. Жюри задало вопросы докладчику и нашло еще две дырки: дырку-2 и дырку-3, причем дырку-2 докладчик залатал у доски.

Жюри разделило очки так: рассказанная часть - 2 очка, дырка-1 - 6 очков, дырка-2 - 2 очка, дырка-3 - 2 очка.

Оппонент получил право рассказывать дырку-1 - т.е. произошла перемена ролей (стоит эта дырка 6 очков, 3 из которых уже получил оппонент; значит, сейчас разыгрывается 3 очка). При этом “новый оппонент” (бывший докладчик) нашел в его рассказе дырку-4.

Жюри оценило так: рассказанная часть - 1 очко (из 3), дырка-4 - 2 очка (из 3).

<u>Общий счет:</u>

Докладчик: 2 (рассказанная часть) + 1 (половина стоимости дырки-2 - т.к. он ее залатал у доски) + 1 (половина стоимости дырки-4 - т.к. он ее нашел, находясь в роли оппонента) = 4 очка.

Оппонент: 3 (половина стоимости дырки-1) + 1 (рассказанная им часть при перемене ролей) = 4 очка.

Жюри: оставшиеся 4 очка.

За красивое решение или красивое оппонирование жюри может дать одно премиальное очко (оно не входит в те 12 очков).

Жюри дает очки гласно, т.е. объясняет, за что они даны или сняты.

Жюри может оштрафовать команду на очко за шум, за неэтичное поведение (после предупреждения). За подсказку штраф может быть больше с прекращением дискуссии по задаче и удалением подсказавшего.

Если остается время, жюри может выслушать более красивые решения, <u>но не давать за них премиальные очки.</u>

Пример 2:

Команда А предъявляет решение, в котором есть ошибка. Команда Б не может конкретизировать место ошибки или обосновать ее. Вместе с тем Б не согласна с А, потому что у нее есть решение, которое она может представит и притом оно верно. В этом случае команде Б не дается право представить свое решение.

Итоги

После каждого вызова жюри сообщает, поясняет и записывает, сколько очков получила каждая команда. Жюри ведет протокол матбоя в виде таблицы, в которой указываются: фамилии выступающих, номер обсуждаемой задачи, направление вызова, взятые минутные перерывы и количество очков, полученных командами и оставшихся у жюри. На доске рисуется упрощенная таблица, без указания фамилий.

После боя очки у каждой команды и у жюри складываются (количество очков, оставшихся у жюри, характеризует трудность задач и силу команд).

Победителем признается команда, набравшая большее количество баллов. Если количество баллов равное, то жюри может дополнительно провести конкурс капитанов, который и определит победителя.

Если остается время, то жюри рассказывает решения нерешенных во время матбоя задач или показывает более удачные решения.

Обязанности жюри

Определяет задачи для соревнования. Жюри должно знать решения всех задач.

Одобряет литературу, которой могут пользоваться участники. Следит за соблюдением правил.

Разъясняет регламент каждой из команд, а также их права и обязанности.

Жюри не вмешивается по существу во время дискуссии между докладчиком и оппонентом.

Если жюри (после вопросов оппонента) видит пробел в решении, то оно должно проверить, может ли докладчик его закрыть.

Если докладчик несет полную чушь, то лучше всего попросить предъявить план решения - у “лапши” не бывает плана. Но это надо делать после вопросов оппонента.

Желательно в течение боя в аналогичных ситуациях принимать аналогичные решения (правило прецедента).

В решении возникших спорных случаев, неописанных в настоящем регламенте, жюри имеет право на окончательное решение.

Статус жюри

Жюри является верховным толкователем правил матбоя. Если ситуация правилами не предусмотрена, жюри принимает решение по своему усмотрению. Решение жюри является обязательным для команд.

Жюри может снять вопрос оппонента (если вопрос не по существу), прекратить доклад или оппонирование (если дискуссия затягивается). Во всех подобных случаях жюри обосновывает свое решение.

Всякие соображения по уже разобранным задачам жюри рассматривает после боя. Задним числом счет изменять нельзя.

Статус ведущего

Ведущий, обычно кто-нибудь из жюри, обязан следить за порядком обсуждения, в частности:

• предоставлять слово докладчику;

• объявлять о завершении доклада и переходе к обсуждению;

• объявлять начало и конец минутного перерыва, взятого командой;

• фиксировать вопросы оппонента и ответы на них докладчика (например, спрашивая оппонента: “Вы удовлетворены ответом?” и т.д.);

• фиксировать мнение оппонента о докладе (“Решение принимается?” или - если решение не принимается - “С чем Вы не согласны в решении?”);

• объявлять о завершении обсуждения и переходе к заданию вопросов жюри докладчику;

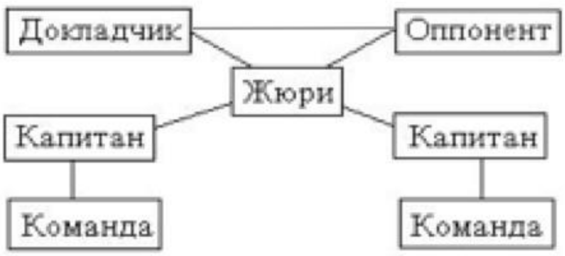
• не позволять оппонентам перебивать докладчика;

• не позволять обсуждению выходить за рамки научной дискуссии;

• объявлять распределение очков за задачу, поясняя, за что они даны или сняты.

Ход боя

Существуют ограничения на общение участников, которые показаны на схеме (например, оппонент может общаться только с докладчиком и с жюри, а капитан - только со своей командой и с жюри).



Участники в матбое — это обе команды и жюри. Все остальные являются наблюдателями, которые не вмешиваются во время боя.

Договорные условия

Количество вызов за бой – 3.

Количество задач – 3-5.

Предельное число выходов к доске одного человека - 2 (не считая конкурса капитанов).

Число минутных перерывов, которые может взять команда, – 3 за весь бой. Для одной задачи максимум 2 перерыва.

Примерное время на доклад (после которого жюри решает: дать еще время или передать слово оппоненту) – 10 минут (с учетом времени ответов на вопросы оппонента).

Примерное время на дискуссию - 10 минут.

Можно ли пользоваться литературой и калькуляторами во время решения задач – да, но литература должна быть одобрена жюри перед боем.

Можно ли выходить к доске с записанным решением - да.

Приложение 1. Перечень возможных тем

(на соревнованиях будут задачи примерно такого уровня сложности)

1. Взвешивания, переливания
2. Конструкции и примеры
3. Раскраски
4. Замощение плоскости, разрезания с ограничением
5. Геометрия квадратов и прямоугольников
6. Обратный ход
7. Части и отношения, проценты
8. Четность
9. Признаки делимости
10. Основная теорема арифметики
11. Простые числа
12. Логические задачи
13. Принцип Дирихле. Доказательство от противного
14. Математические игры
15. Принцип крайнего
16. Полный перебор
17. Подсчет двумя способами
18. Графы
19. Комбинаторика
20. Инвариант

Приложение 2. Примеры задач с решениями для 5 класса

(на соревнованиях будут задачи примерно такого уровня сложности)

1. Докажите, что между числами $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ нельзя расставить знаки + и – так, чтобы значение выражения было равно нулю.

Решение. После приведения дробей к наименьшему общему знаменателю (60), дробь принимает вид $\frac{\pm 60 \pm 30 \pm 20 \pm 15 \pm 12}{60}$. При любом выборе знаков перед слагаемыми в числителе результат окажется нечетным, поскольку среди них имеется только одно нечетное число. Следовательно, выражение не может равняться нулю.

2. Витя выложил из карточек с цифрами пример на сложение, а потом поменял местами две карточки $314159 + 291828 = 585787$. Как видите, равенство нарушилось. Какие карточки переставил Витя?

Решение. Легко заметить, что ошибки содержатся в разрядах сотен и десятков тысяч. После этого нетрудно выполнить перестановку: 314159 + 271828 = 585987.

3. Расставьте скобки так, чтобы получилось верное равенство $1 - 2 \cdot 3 + 4 + 5 \cdot 6 \cdot 7 + 8 \cdot 9 = 1995$.

Решение. Перебором возможных вариантов получаем решение $(1 - 2) \cdot 3 + (4 + 5 \cdot 6 \cdot 7 + 8) \cdot 9 = 1995$.

4. Числитель и знаменатель дроби – натуральные числа, дающие в сумме 101. Известно, что дробь не превосходит 1/3. Укажите наибольшее возможное значение такой дроби.

Решение. Дробь 76/25 больше 3, а дробь 75/26 меньше 3, следовательно, вторая из них является наибольшей из дробей, не превосходящих 3.

5. Карлсон написал дробь 10/97. Малыш может: 1) прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно; 2) умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число. Сможет ли Малыш с помощью этих действий получить дробь 1/2?

Решение. Да, сможет. Для этого достаточно прибавить к числителю и знаменателю число 77, в результате чего получится дробь 87/174 или 1/2.

6. Для нумерации детской книги понадобилось 204 цифры. Сколько страниц в книге, если нумерация начинается с первой страницы?

Решение. Первые 9 номеров страниц являются однозначными, следующие 90 – двузначными, после этого идут трехзначные номера. В сумме у однозначных и двузначных номеров использовано 189 цифр, значит, на трехзначные номера остается 15 цифр, то есть таких номеров 5. Таким образом, в книге всего 104 страницы.

7. Когда у рыбака спросили, как велика пойманная им щука, он сказал: «Я думаю, что хвост ее - 1 кг, голова столько, сколько хвост и половина туловища, а туловище – сколько голова и хвост вместе». Сколько весит щука?

Решение. Пусть голова, туловище и хвост весят x, y, z кг. Тогда из условия следует $z=1, x=1+\frac{y}{2}, y=x+1$. Из полученных уравнений следует $2x-2=x+1 \Rightarrow x=3 \Rightarrow y=4 \Rightarrow x+y+z=8$.

Приложение 3. Примеры задач с решениями для 6 класса

(на соревнованиях будут задачи примерно такого уровня сложности)

1. Сократите дробь $\frac{23232323}{61616161}$.

Решение. Преобразуем дробь, используя десятичную запись числа $\frac{23232323}{61616161}=\frac{23\cdot(1+100+10000+1000000)}{61\cdot(1+100+10000+1000000)}=\frac{23}{61}$.

2. Тетрадь, ручка и карандаш стоят 120 рублей. А 5 тетрадей, 2 ручки и 3 карандаша стоят 350 рублей. Что дороже: две тетради или одна ручка?

Решение. Пусть стоимость тетради, ручки и карандаша равны x, y, z. Тогда имеем систему двух уравнений $\begin{cases} x+y+z=120 \\ 5x+2y+3z=350 \end{cases}$. Умножая первое уравнение на 3 и вычитая из него второе, получаем $y-2x=10 \Rightarrow y=2x+10$. Значит, ручка стоит на 10 рублей больше, чем две тетради.

3. Объем бутылки кваса – 1,5 литра. Первый выпил половину бутылки, второй – треть того, что осталось после первого, третий – четверть оставшегося от предыдущих, и так далее, четырнадцатый – пятнадцатую часть оставшегося. Сколько кваса осталось в бутылке?

Решение. После первого в бутылке осталось 1/2 объема, после второго - $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ объема, после третьего $\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ и т.д, после четырнадцатого $\frac{1}{14}\cdot\frac{14}{15}=\frac{1}{15}$, то есть в бутылке осталось 0,1 л кваса.

4. В папирусе Ринда (Древний Египет) среди прочих сведений содержатся разложения дробей в суммы дробей с числителем 1, например $\frac{2}{73}=\frac{1}{60}+\frac{1}{219}+\frac{1}{292}+\frac{1}{x}$. Один из знаменателей здесь замене буквой x. Найдите этот знаменатель.

Решение. Учитывая, что $292=73\cdot 4, 219=73\cdot 3$, получаем $\frac{2}{73}-\frac{1}{219}-\frac{1}{292}=\frac{24-4-3}{73\cdot 12}=\frac{17}{73\cdot 12}$. Тогда окончательно $\frac{1}{x}=\frac{17}{73\cdot 12}-\frac{1}{60}=\frac{17\cdot 5-73}{73\cdot 60}=\frac{12}{73\cdot 60}=\frac{1}{365}$.

5. Можно ли в равенстве $\frac{*}{*}+\frac{*}{*}+\frac{*}{*}+\frac{*}{*}=*$ заменить звездочки цифрами от 1 до 9, взятыми по одному разу, так, чтобы равенство стало верным?

Метод перебора позволяет найти решения $\frac{7}{4}+\frac{6}{8}+\frac{5}{1}+\frac{3}{2}=9; \frac{5}{4}+\frac{6}{8}+\frac{9}{3}+\frac{2}{1}=7$.

6. а) Придумайте три правильные несократимые дроби, сумма которых – целое число, а если каждую из этих дробей перевернуть, (то есть, заменить на обратную), то сумма полученных дробей тоже будет целым числом. б) То же, но числители дробей – не равные друг другу натуральные числа.

Решение. а) Существует множество таких дробей, например, 1/2, 1/3 и 1/6. б) Например, 2/11, 3/11, 6/11.

7. Папа купил на праздник своим детям коробку конфет. Федя взял половину конфет и половинку одной конфеты. Аня взяла половину остатка и еще полконфеты. Коля взял половину нового остатка и еще полконфеты. Маша взяла половину оставшихся конфет и еще полконфеты. После этого в коробке осталась одна конфета. Сколько конфет было в коробке?

Решение. Пусть в коробке было x конфет. После Феди осталось $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$ конфет, после Ани $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}-\left(\frac{x}{4}-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}=\frac{x}{4}-\frac{3}{4}$ конфет, после Коли $\frac{x}{4}-\frac{3}{4}-\left(\frac{x}{8}-\frac{3}{8}\right)-\frac{1}{2}=\frac{x}{8}-\frac{7}{8}$ конфет, а после Маши $\frac{x}{8}-\frac{7}{8}-\left(\frac{x}{16}-\frac{7}{16}\right)-\frac{1}{2}=\frac{x}{16}-\frac{15}{16}$ конфет. Тогда $\frac{x}{16}-\frac{15}{16}=1 \Rightarrow x=31$.

Приложение 4. Примеры задач с решениями для 6 класса

(на соревнованиях будут задачи примерно такого уровня сложности)

1. Найдите сумму $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{2019\cdot 2020}$.

Решение. Преобразуем все дроби в разности дробей $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3};\ ...;\ \frac{1}{2019\cdot 2020}=\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}\Rightarrow$
$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2020}=\frac{2019}{2020}$.

2. Чему равно произведение $\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{1}{225}\right)$?

Решение. Применяя к каждой скобке формулу разности квадратов, находим $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)...\left(1-\frac{1}{15}\right)\left(1+\frac{1}{15}\right)=$
$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot...\cdot\frac{14}{15}\cdot\frac{16}{15}=\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{15}=\frac{8}{15}$.

3. Найти две такие обыкновенные дроби, одну со знаменателем 8, а другую – со знаменателем 13, чтобы они не были равны, но разность между большей и меньшей из них была как можно меньше.

Решение. Найдем модуль разности дробей $\left|\frac{x}{8}-\frac{y}{13}\right|=\left|\frac{13x-8y}{104}\right|$. Это выражение принимает наименьшее значение в случае, когда числитель равен 1. Например, $x=5,\ y=8$.

4. Впишите вместо звездочек шесть различных цифр так, чтобы все дроби были несократимыми, а равенство верным: $\frac{*}{*}+\frac{*}{*}=\frac{*}{*}$.

Решение. Например, $\frac{1}{6}+\frac{7}{3}=\frac{5}{2}$.

5. Зайчик, ёжик и белочка дарят друг другу орехи. Сначала ёжик и белочка подарили ровно половину своих орехов зайчику. Затем белочка и зайчик отдали ровно половину того, что имеют ёжику. Наконец зайчик и ёжик отдали ровно половину имеющихся у них орехов белочке. Известно, что у белочки и в начале, и в конце было 44 ореха. Сколько всего орехов у зверят? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.

Решение. Пусть у зайчика, ёжика и белочки было $x, y, 44$ орехов. Тогда из условия следует, что после первого обмена у ёжика и белочки стало $\frac{y}{2}$ и 22 орехов, а у зайчика $x+\frac{y+44}{2}=x+\frac{y}{2}+22$ орехов. После второго обмена у белочки стало 11 орехов, у зайчика $\frac{x}{2}+\frac{y+44}{4}=\frac{2x+y}{4}+11$ орехов, а у ёжика $\frac{y}{2}+11+\frac{x}{2}+\frac{y+44}{4}=\frac{2x+3y}{4}+22$ орехов. Наконец, после третьего обмена у белочки стало $11+\frac{2x+y}{8}+\frac{11}{2}+\frac{2x+3y}{8}+11=\frac{55}{2}+\frac{x+y}{2}=44$ орехов. Из полученного уравнения следует $4x+4y=132 \Rightarrow x+y=33$. Таким образом, всего у зверят 44 + 33 = 77 орехов. При этом из первого обмена следует, что y - четное число, тогда x - нечетное число, значит, согласно второму обмену y должно делиться на 2, но не делиться на 4. Отсюда следуют возможные количества орехов у зайчика и ёжика $(x, y)=(31,2); (27,6); (23,10); (19,14); (15,18); (11,22); (7,26); (3,30)$.

6. В ряд стояло 10 детей. В сумме у девочек и мальчиков орехов было поровну. Каждый ребенок отдал по ореху каждому из стоящих правее него. После этого у девочек стало на 25 орехов больше, чем было. Сколько в ряду девочек?

Решение. Пусть девочек в ряду m, а мальчиков n. Всего было передано 9 + 8 + 7 +…+ 1 = 45 орехов. Все девочки, кроме самой правой девочки в ряду передали другим девочкам $m-1+m-2+...+1=\frac{m(m-1)}{2}$ орех, отчего суммарное число орехов у девочек не изменилось. Аналогично, мальчики передали мальчикам $\frac{n(n-1)}{2}$. Значит, мальчики девочкам и девочки мальчикам передали в сумме $45-\frac{n(n-1)}{2}-\frac{m(m-1)}{2}$ орехов. Легко убедиться, что значение этого выражения максимально и равно 25 при $m=n=5$. Так как мальчики должны передать девочкам на 25 орехов больше, чем получить от них, это означает, что ни одна девочка не передавала орехи мальчикам, то есть 5 девочек стоят в ряду справа, а 5 мальчиков – слева.