Олимпиада по математике

8 класс

Решения и критерии оценивания

1. Выберем из набора 16 произвольных слитков и разделим их на 8 пар. Первыми 8 взвешиваниями сравниваем вес слитков в каждой паре и определяем, какой из них тяжелее. Далее 8 тяжелых слитков опять разделяем на 4 пары и следующими 4 взвешиваниями сравниваем вес слитков в каждой паре и находим 4 самых тяжелых. Далее аналогично делим эти 4 слитка на 2 пары и следующими 2 взвешиваниями сравниваем вес слитков в парах и находим 2 наиболее тяжелых. Наконец, 15 взвешиванием сравниваем вес двух самых тяжелых слитков и находим самый тяжелый из выбранных 16. Последним взвешиванием сравниваем вес этого самого тяжелого слитка с произвольным слитком из оставшихся 15. Слиток, оказавшийся тяжелее в результате этого взвешивания, будет тяжелее 16 других, следовательно, он не может быть средним по весу и поэтому является гарантированно золотым.

Любой правильный алгоритм взвешиваний, дающий требуемый результат – 7 баллов.

2. Предположим, что таких двух марок и двух показателей нет. Это означает, что для каждой пары марок их оценки x_n и y_n (n - номер показателя от 1 до 10) связаны неравенствами $x_n \geq y_n$ (одно из неравенств должно быть строгим для исключения совпадения оценок по всем 10 показателям). Складывая эти неравенства, получаем, что суммы оценок любых двух марок должны отличаться хотя бы на единицу, и все марки можно упорядочить по сумме оценок в строго возрастающем порядке. Наименьшая возможная сумма оценок равна 10, а наибольшая – 30, то есть всего существует 21 различная сумма. Поскольку марок больше, такое ранжирование невозможно, и предположение неверно.

Любое правильное решение задачи – 7 баллов.

3. Обозначим числа на карточках через $a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2; d_1, d_2$. Так как число на каждой карточке можно выбрать 2 способами, всего имеется 16 произведений, сумма которых может быть найдена по формуле $(a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2)(d_1+d_2)$. Следовательно, число 330 необходимо представить в виде произведения четырех множителей, больших единицы. Разложение этого числа на простые множители имеет вид $330 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 11$. Так как всего множителей четыре, сумма чисел на каждой карточке должна совпадать с одним из них, то есть эта сумма равна $2+3+5+11=21$.

Ответ без обоснования – 0 баллов. Найдено число произведений – 1 балл. Установлено, что сумма всех произведений может быть найдена при помощи умножения сумм чисел на всех карточках – 2 балла. Использовано разложение числа 330 на простые множители – 2 балла. Получен правильный ответ – 2 балла. Всего – 7 баллов.

4. Решение. Второй делитель с начала — это наименьший простой делитель числа N, обозначим его p. Третий делитель с начала — это либо p^2, либо второй по величине простой делитель числа N, обозначим его q. Рассмотрим теперь эти 2 случая.

Случай 1. Третий делитель с начала — это p^2. Тогда третий делитель с конца — это $\frac{N}{p^2}$. По условию задачи $\frac{N}{p^2} = 21p \Rightarrow N = 21p^3$. Видно, что 3 и 7 — делители числа N, поэтому $p \le 3$. Если $p = 2$, то третий по величине делитель числа N равен 3; если же $p = 2$, то третий по величине делитель числа N не больше 7, т. е. не 3^2. Противоречие.

Случай 2. Третий делитель с начала — это q. Тогда третий делитель с конца — это $\frac{N}{q}$. По условию задачи $\frac{N}{q} = 21p \Rightarrow N = 21pq$. Видно, что 3 и 7 — делители числа N, поэтому $p \leqslant 3$, $q \leqslant 7$. Отсюда получаем, что $N \leqslant 441$. Несложно проверить, что это число удовлетворяет условию.

Ответ без обоснования – 1 балл. Любое правильное решение задачи – 7 баллов.

5. Избавляясь от дробей и приводя подобные слагаемые из исходного равенства получаем $a^2 + b^2 = ab + 1$. Деля это равенство на ab, находим $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - \frac{1}{ab} = 1$.

Любое правильное решение задачи – 7 баллов.

6. Любой прямоугольник 3×8 можно со стороны длинной стороны дополнить до квадрата 8×8 двумя прямоугольниками размерами 4×5. Следовательно, в любом прямоугольнике 3×8 должно быть $13 - 2 \cdot 4 = 5$ клеток. Если взять любой прямоугольник 8×15, его можно разрезать на 5 прямоугольников 3×8, следовательно, в нем должно быть 25 отмеченных клеток. В то же время этот прямоугольник можно разрезать на 6 прямоугольников 4×5, следовательно, в нем должно быть 24 отмеченных клетки. Противоречие.

Ответ без обоснования – 0 баллов. Любое правильное решение задачи – 7 баллов.

7. Воспользуемся неравенством $(x-1)^2 \ge 0 \Rightarrow x^2 + 1 \ge 2x$. Применяя его к числителям всех слагаемых левой части неравенства, получаем

$$\frac{(a+b-c)^2+1}{c} + \frac{(b+c-a)^2+1}{a} + \frac{(c+a-b)^2+1}{b} \ge \frac{2(a+b-c)}{c} + \frac{2(b+c-a)}{a} + \frac{2(c+a-b)}{b} =$$

$$2\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) - 6.$$

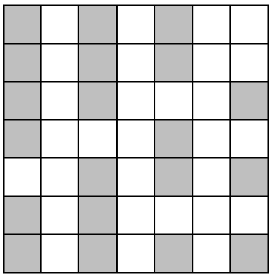
Применяя теперь неравенство $x + \frac{1}{x} \ge 2$, верное для положительных x, окончательно получаем

$2\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) - 6 \ge 2(2+2+2) - 6 = 6$, откуда следует доказываемое неравенство.

Любое верное доказательство – 7 баллов.

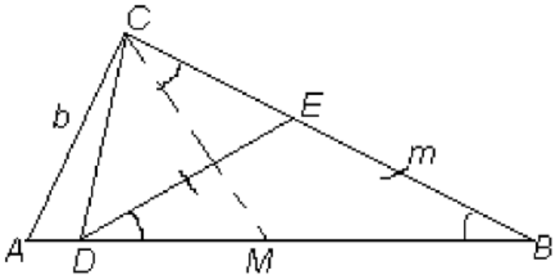
8. Оценка. Докажем, что на поле 6×6 «корабли» расставить невозможно. Для этого разделим поле на квадратики 2×2 (всего их девять). В каждом таком квадратике может находиться не более одного корабля (даже одноклеточных). Так как всего требуется расставить 10 кораблей, это сделать невозможно.

Пример. Расстановка «кораблей» на поле 7×7 показана на рисунке.



Ответ без обоснования – 1 балл. Любое правильно обоснованное решение задачи – 7 баллов.

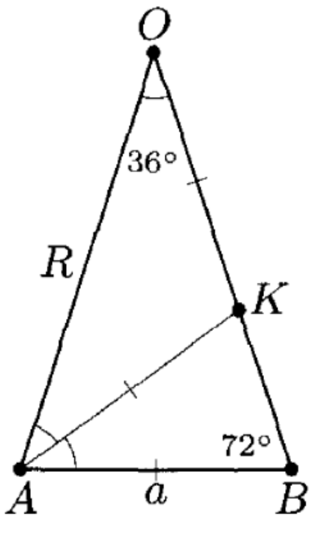
9. Пусть М – середина гипотенузы АВ данного треугольника. Тогда $AM = BM = CM$ и $\angle BDE = \angle MBC = \angle MCB$ (см. рисунок). Из этого следует, что $\Delta BDE = \Delta BCM$ (по стороне и двум углам).



Тогда $CM = DE = m$ и $CE = BC - BE = BD - BM = DM$. Отсюда периметр четырехугольника $P_{ADEC} = AD + DE + EC + CA = AD + m + DM + b = AM + m + b = 2m + b$.

Любое правильное решение задачи – 7 баллов.

10. Рассмотрим равнобедренный треугольник АОВ, в котором АО = ОВ = R, $\angle AOB = 36^0$ (см. рисунок).



Проведем биссектрису АК. Тогда $\angle AKB = 72^0$ и $AK = OK = AB$. Пусть АВ = а. Тогда по свойству биссектрисы треугольника $\frac{AO}{AB} = \frac{OK}{BK} \Rightarrow \frac{R}{a} = \frac{a}{R-a} \Rightarrow a^2 + Ra - R^2 = 0$. Это квадратное уравнение имеет решение $a = R\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Таким образом, решение задачи сводится к построению равнобедренного треугольника с боковыми сторонами R и основанием $R\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Для решения этой задачи:

1) задаемся некоторым произвольным масштабом (отрезком) длины R;

2) строим отрезок длины $R\sqrt{5}$ при помощи построения прямоугольного треугольника с катетами R и 2R (гипотенуза в нем равна $R\sqrt{5}$);

3) строим отрезок длины $R(\sqrt{5}-1)$;

4) делим этот отрезок пополам;

5) строим треугольник.

Угол при вершине построенного треугольника равен 36^0.

Построение треугольника по трем сторонам является элементарным, и его описывать не надо. Это же относится к построению отрезка, равного разности двух данных отрезков и построению прямоугольного треугольника по двум катетам.

Любое правильное решение задачи – 7 баллов.